



รายการโทรทัศน์เพื่อการศึกษา
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณิตศาสตร์

การใช้เครื่องมือและออกแบบผลิตภัณฑ์ ตอนที่ 2

โดย

อ.กนกวลี อุษณกรกุล

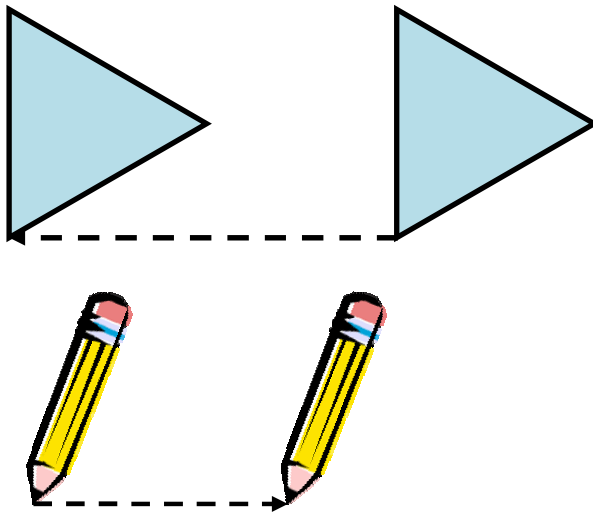
เรื่องการใช้เครื่องมือและการออกแบบผลิตภัณฑ์

ตอนที่ 2

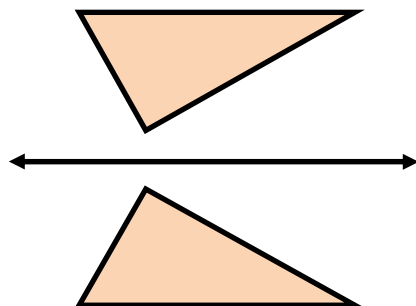
1. การแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงทางเรขาคณิตมี 3 แบบ ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน การแปลงทางเรขาคณิตทั้งสามแบบนี้จะได้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ

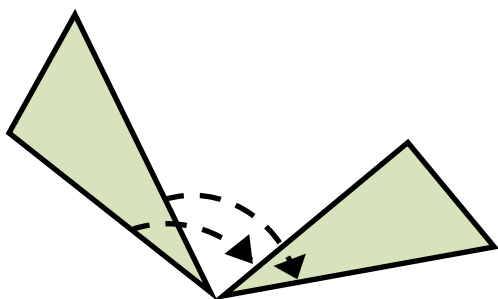
ตัวอย่าง การแปลงที่เป็นการเลื่อนขนาน



ตัวอย่าง การแปลงที่เป็นการสะท้อน



ตัวอย่าง การแปลงที่เป็นการหมุน

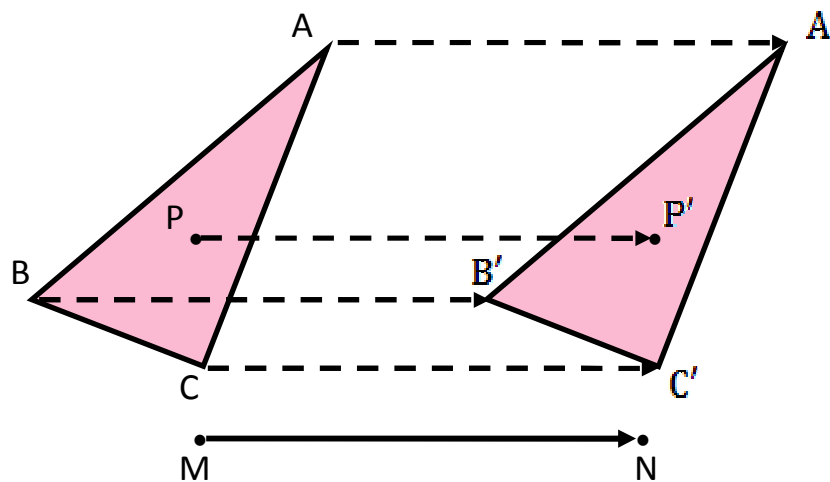


การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการเลื่อนจุดทุกจุดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกันและเป็นระยะทางที่เท่ากันตามที่กำหนด

ในการบอกทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน จะใช้เวกเตอร์เป็นตัวกำหนด

การเลื่อนขนานนี้จะใช้เวกเตอร์ \overrightarrow{MN} เพื่อบอกทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนานดังรูป



เวกเตอร์ \overrightarrow{MN} อาจเขียนแทนด้วย \overline{MN} ซึ่ง \overline{MN} จะมีทิศทางจากจุดเริ่มต้น M ไปยังจุดสิ้นสุด N และมีขนาดเท่ากับความยาวของ \overline{MN}

จากตัวอย่างการเลื่อนขนานของข้างต้นจะได้ว่า

1. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ และ $\overline{PP'}$ จะขนานกันกับ \overline{MN}

2. $AA' = BB' = CC' = PP' = MN$

จุด A และจุด A' เป็นจุดที่สมนัยกัน

จุด B และจุด B' เป็นจุดที่สมนัยกัน

จุด C และจุด C' เป็นจุดที่สมนัยกัน

\overline{AB} และ $\overline{A'B'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน

\overline{BC} และ $\overline{B'C'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน

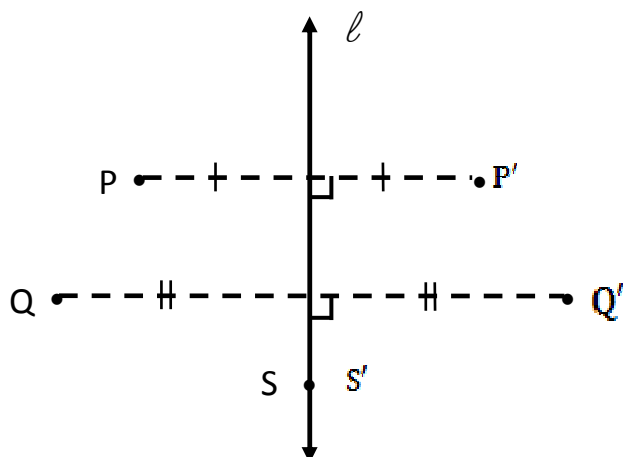
\overline{CA} และ $\overline{C'A'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน

สมบัติของการเลื่อนขนานมีดังนี้

- สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่ารូปรต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจะเท่ากันทุกประการ
- ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของส่วนเส้นตรงนั้นจะขนานกัน

การสะท้อน

ในทางคณิตศาสตร์การสะท้อนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตอีกแบบหนึ่ง ซึ่งกำหนดไว้ ดังนี้

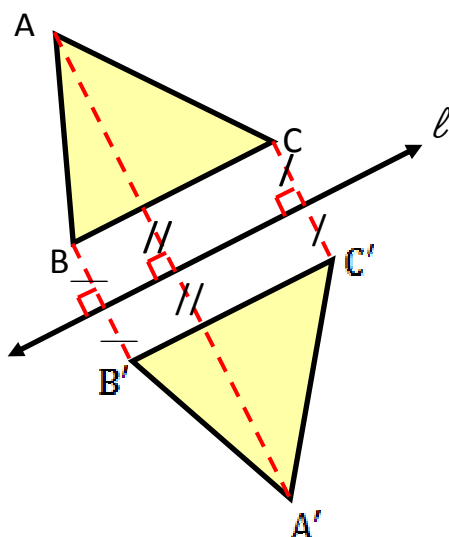


การสะท้อนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีเส้นตรง l ที่ตั้งฉากกับเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน แต่
 ละจุด P บนระนาบจะมีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด P โดยที่

1. ถ้าจุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง l แล้ว เส้นตรง l จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$
2. ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง l แล้ว จุด P และจุด P' เป็นจุดเดียวกัน

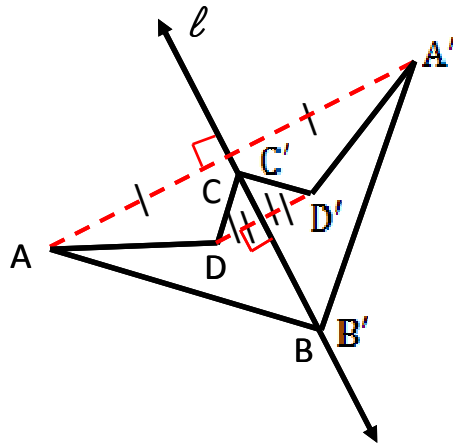
ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสะท้อนที่มีเส้นตรง l เป็นเส้นสะท้อน

กรณีที่ 1 ทุกจุดบนรูปต้นแบบไม่อยู่บนเส้นตรง l

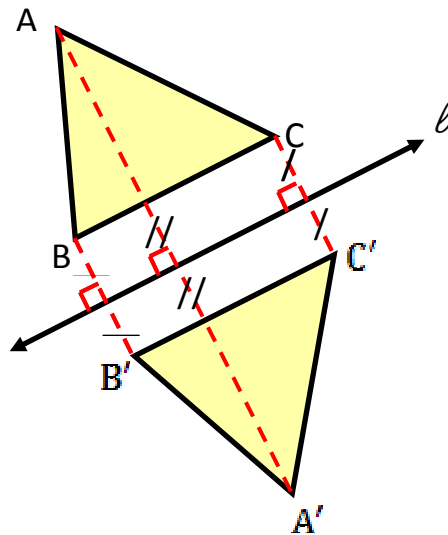


กรณีที่ 2

มีบางจุดบนรูปต้นแบบอยู่บนเส้นตรง l



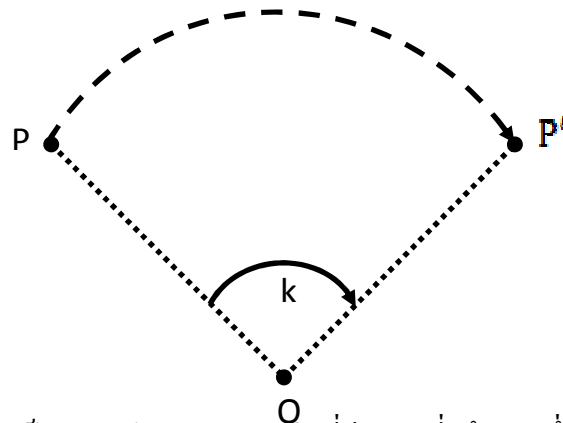
สมบัติของการสะท้อนมีดังนี้



1. สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการสะท้อนได้สนิทโดยต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ
2. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนของส่วนของเส้นตรงนั้นไม่จำเป็นต้องขนานกันทุกคู่
3. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดที่สมนัยกันบนภาพที่ได้จากการสะท้อนจะขนานกัน และไม่จำเป็นต้องยาวเท่ากัน

การหมุน

ในทางคณิตศาสตร์การหมุนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตอีกแบบหนึ่ง ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้



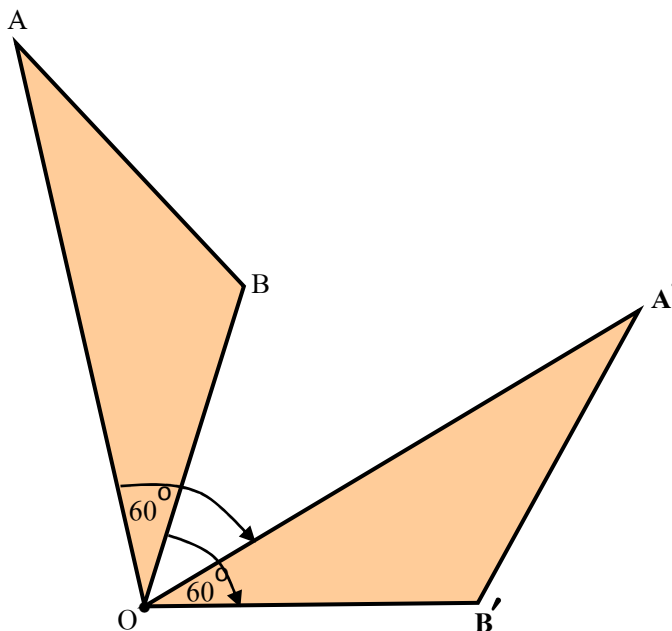
การหมุนบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O ที่ตรึงจุดหนึ่งเป็นจุดหมุน แต่ละจุด P บนระนาบจะมีจุด P' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนดด้วยมุมที่มีขนาด k โดยที่

1. ถ้าจุด P ไม่ใช่จุด O แล้ว $OP = OP'$ และขนาดของ $\angle POP'$ เท่ากับ k

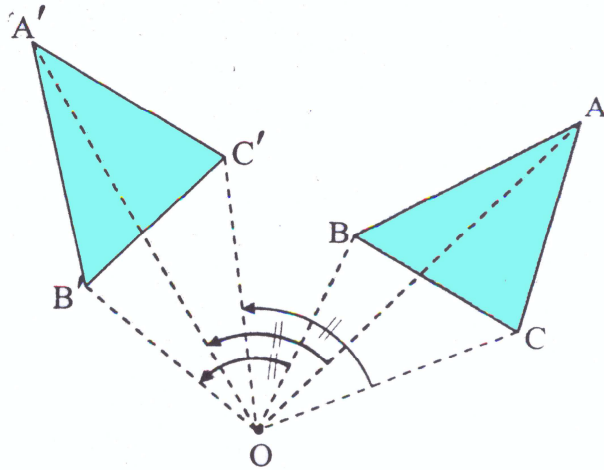
2. ถ้าจุด P เป็นจุดเดียวกันกับจุด O แล้ว P เป็นจุดหมุน

ตัวอย่าง การหมุนที่มีจุด O เป็นจุดหมุน

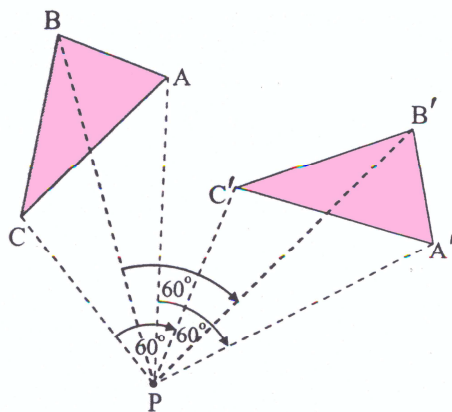
กรณีที่ 1 จุดหมุน O อยู่บนรูปต้นแบบ



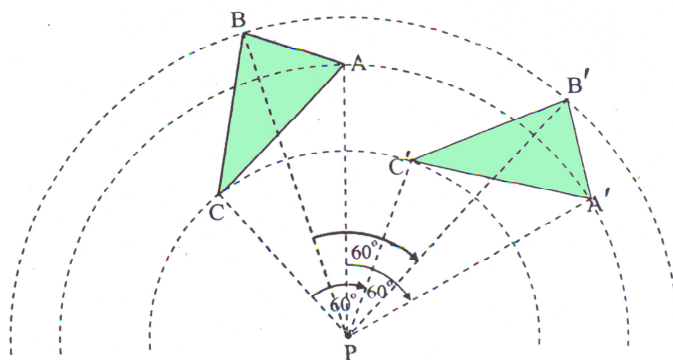
กรณีที่ 2 จุดหมุน O ไม่อยู่บนรูปต้นแบบ



สมบัติของการหมุนมีดังนี้



1. สามารถเลื่อนรูปต้นแบบทับภาพที่ได้จากการหมุนได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวได้ว่า รูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ
2. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนส่วนของเส้นตรงนั้น ไม่จำเป็นต้องขนานกันทั้งคู่



3. จุดบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการหมุนจุดนั้น แต่ละคู่จะอยู่บนวงกลมที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลางเดียวกัน แต่วงกลมเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน

แนวข้อสอบเรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ข้อใดเป็นการเลื่อนขนาน

ก. $\begin{matrix} H \\ I \end{matrix}$

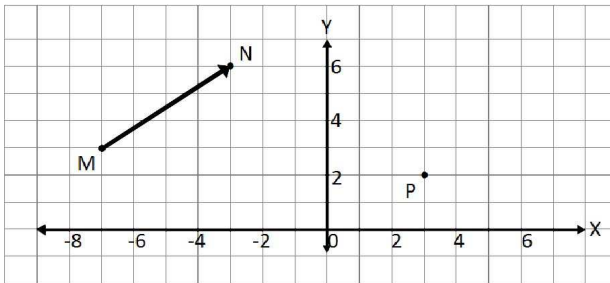
ข. $\begin{matrix} H & & H \\ & & \end{matrix}$

ค. $\begin{matrix} H \\ I \end{matrix}$

ง. $\begin{matrix} I & H \end{matrix}$

เฉลย ข

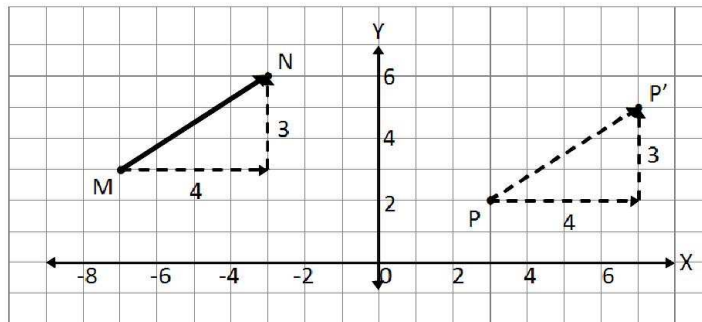
2. จากรูป ถ้าเลื่อนขนานจุด P ด้วย \overline{MN} ไปที่จุด P' จะได้จุด P' ตรงกับข้อใด



- ก. (-1, -1)
- ข. (-1, 5)
- ค. (7, -1)
- ง. (7, 5)

เฉลย ง

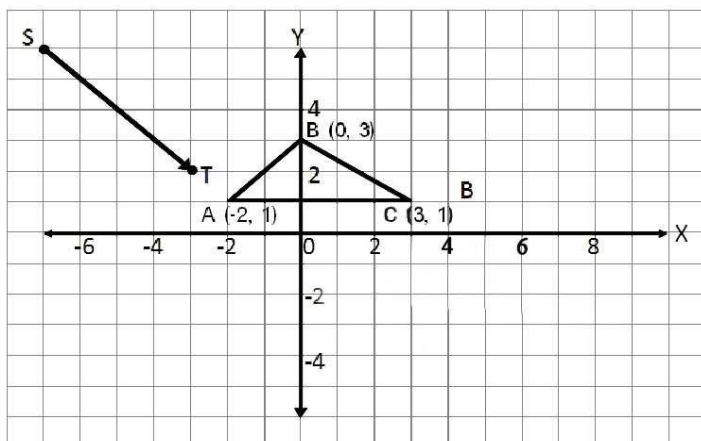
เลื่อนจุด P ไปทางขวาตามแนวแกน X 4 หน่วยและเลื่อนขึ้นไปตามแนวแกน Y 3 หน่วย จะได้ตำแหน่งของจุด P' ดังรูป



ข้อสังเกตในการเลื่อนขนานจุด P(x, y)

1. เลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X a หน่วย และเลื่อนขึ้นไปตามแนวแกน Y b หน่วย
จุด P(x, y) จะเลื่อนไปที่จุด P'(x+a, y+b)
2. เลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X a หน่วย และเลื่อนลงไปตามแนวแกน Y b หน่วย
จุด P(x, y) จะเลื่อนไปที่จุด P'(x+a, y-b)
3. เลื่อนไปทางซ้ายตามแนวแกน X a หน่วย และเลื่อนขึ้นไปตามแนวแกน Y b หน่วย
จุด P(x, y) จะเลื่อนไปที่จุด P'(x-a, y+b)
4. เลื่อนไปทางซ้ายตามแนวแกน X a หน่วย และเลื่อนลงไปตามแนวแกน Y b หน่วย
จุด P(x, y) จะเลื่อนไปที่จุด P'(x-a, y-b)

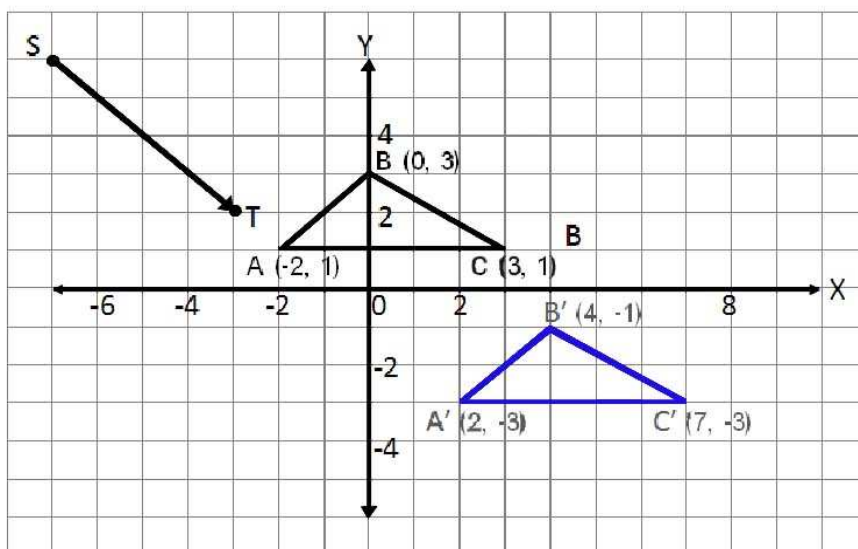
4. กำหนด $\triangle ABC$ มีจุด $A(-2, 1)$, จุด $B(0, 3)$ และจุด $C(3, 1)$ เป็นจุดยอดมุม เลื่อน $\triangle ABC$ ด้วย \vec{ST} ที่กำหนดให้ พิกัดของจุดยอดมุมของ $\triangle A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ตรงกับข้อใด



- ก. $A'(2, 3)$, $B'(4, 1)$, $C'(7, 3)$ ข. $A'(-2, 3)$, $B'(-4, 1)$, $C'(7, -3)$
 ค. $A'(2, -3)$, $B'(4, -1)$, $C'(7, -3)$ ง. $A'(-2, 3)$, $B'(4, -1)$, $C'(7, 3)$

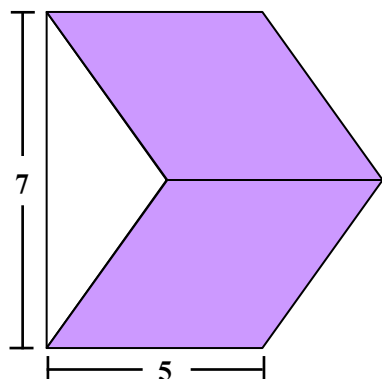
เฉลย ก

แนวคิด การหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ให้หาจุด A' , B' และ C' ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ภาพ $\triangle A'B'C'$ เมื่อพิจารณาทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนานด้วย \vec{ST} จะได้ว่า ต้องเลื่อนจุด A, B และ C แต่ละจุดไปทางขวาตามแนวแกน X 4 หน่วย และเลื่อนลงมาตามแนวแกน Y 4 หน่วย



- จุด $A(-2, 1)$ เลื่อนไปที่จุด $A'(-2+4, 1-4)$ หรือ $A'(2, -3)$
 จุด $B(0, 3)$ เลื่อนไปที่จุด $B'(0+4, 3-4)$ หรือ $B'(4, -1)$
 จุด $C(3, 1)$ เลื่อนไปที่จุด $C'(3+4, 1-4)$ หรือ $C'(7, -3)$

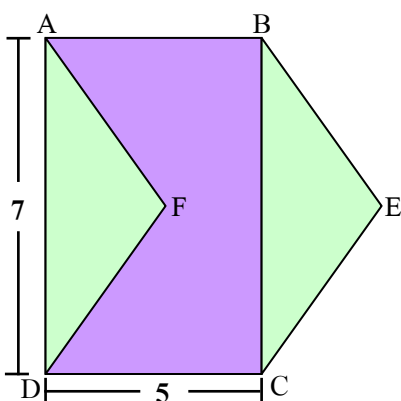
5. จากรูป พื้นที่โดยประมาณของส่วนที่แรเงาเท่ากับกี่ตารางหน่วย



- ก. 12
- ข. 24
- ค. 30
- ง. 35

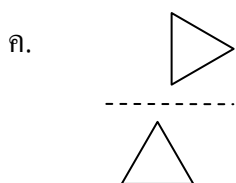
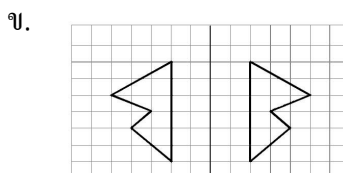
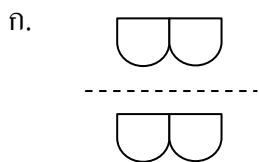
เฉลย ง

แนวคิด



ลาก \overline{BC} เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม BEC ไปแทนที่
ในสามเหลี่ยม AFD จะได้ว่า พื้นที่โดยประมาณ
ของส่วนที่แรเงาเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
 $ABCD = 5 \times 7 = 35$ ตารางหน่วย

6. รูปใดต่อไปนี้เป็นภาพการสะท้อน



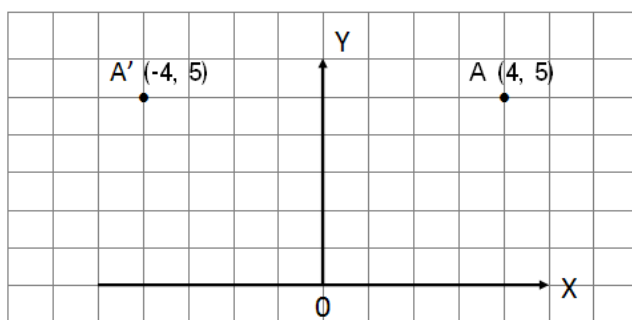
เฉลย ข

7. ถ้ากำหนดจุด A ให้มีพิกัดเป็น $(4, 5)$ จุด A' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อนแล้วพิกัดของ A' ตรงกับข้อใด

- ก. $A'(4, -5)$
- ข. $A'(-4, 5)$
- ค. $A'(4, 5)$
- ง. $A'(-4, -5)$

เฉลย ข

แนวคิด



พิกัดของ A' คือ $(-4, 5)$

ข้อสังเกต สะท้อนจุด (x, y) ข้ามแกน Y พิกัด y จะคงเดิม พิกัด x เปลี่ยนเป็นตรงข้าม นั่นคือ $A(x, y)$ สะท้อนเป็นจุด $A'(-x, y)$

8. รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด A $(-2, 5)$ B $(-4, 3)$ และ C $(-1, 1)$ เป็นรูปต้นแบบ มีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน ถ้ารูปสะท้อนคือ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ แล้ว พิกัดของ $A'B'C'$ ตรงกับข้อใด

ก. $A'(-2, -5)$, $B'(-4, -3)$, $C'(-1, -1)$

ข. $A'(-2, 5)$, $B'(-4, -3)$, $C'(-1, 1)$

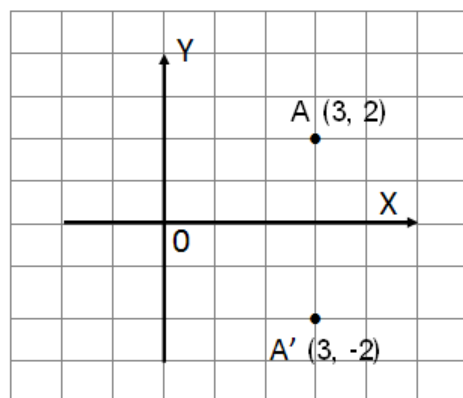
ค. $A'(2, 5)$, $B'(4, 3)$, $C'(1, 1)$

ง. $A'(2, -5)$, $B'(4, -3)$, $C'(1, -1)$

เฉลย ค

เชื่อหรือไม่ เชื่อหรือไม่ว่า สะท้อนจุด (x, y) ข้ามแกน X พิกัด x จะคงเดิม พิกัด y เปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม

แนวคิด พิจารณาการสะท้อนจุด A $(3, 2)$ ข้ามแกน X



พิกัดของจุด A' คือ $(3, -2)$

จะเห็นว่าสะท้อนจุด (x, y) ข้ามแกน X พิกัด x จะคงเดิม พิกัด y เปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม นั่นคือ $A(x, y)$ สะท้อนเป็นจุด $A'(x, -y)$

9. A' เป็นจุดที่เกิดจากจุด A เป็นรูปต้นแบบ และมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน ถ้า A มีพิกัด (a, b) และ $A'(7, -5)$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 8

ข. 9

ค. 10

ง. 12

เฉลย ง

แนวคิด A มีพิกัด (a, b) และสะท้อนข้ามแกน X

ดังนั้น A' มีพิกัด $(a, -b)$

แต่ A' มีพิกัด $(7, -5)$

แสดงว่า $a = 7$ และ $b = 5$

ดังนั้น $a + b = 7 + 5 = 12$

10. ให้จุด A' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด $A(8, 5)$ บนระนาบรอบจุด $(0, 0)$ ตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180 องศา แล้วจุด A' มีพิกัดตรงกับข้อใด

ก. $A'(-8, -5)$

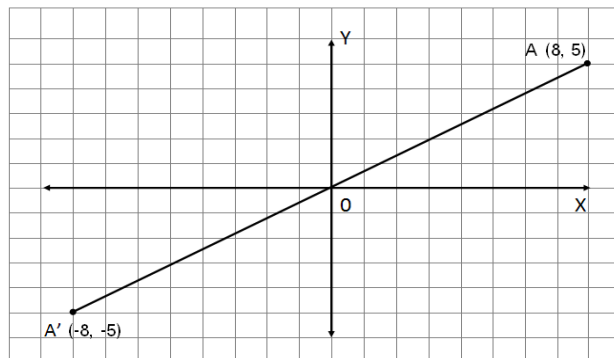
ข. $A'(-8, 5)$

ค. $A'(8, -5)$

ง. $A'(8, 5)$

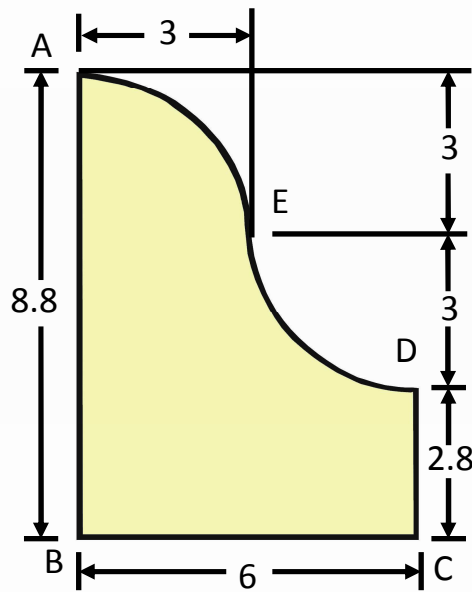
เฉลย ก

แนวคิด หาจุด A' ได้โดยลากเส้นตรงผ่านจุด $A(8, 5)$ และจุดหมุน $(0, 0)$ เพื่อให้เกิดมุมตรงซึ่งมีขนาด 180 องศา จะได้ $A'(-8, -5)$



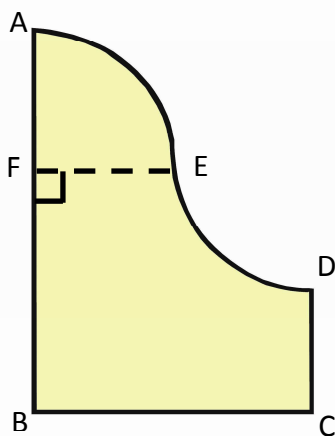
ข้อสังเกต จุดหมุน $A(x, y)$ ตามเข็มนาฬิกาจะได้จุด $A'(-x, -y)$

11. พื้นที่ของรูป ABCDE ซึ่งมีความยาวกำกับไว้เท่ากับกี่ยี่สิบตารางหน่วย

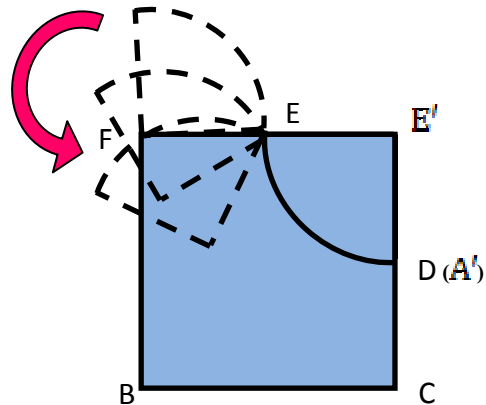


- ก. 24.6
- ข. 26.4
- ค. 28.3
- ง. 34.8

แนวคิด



ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2

ขั้นที่ 1 จากรูปที่กำหนดให้ ลาก $\overline{EF} \perp \overline{AB}$

ขั้นที่ 2 ใช้จุด E เป็นจุดหมุน หมุนรูป AFE ให้จุด A ซ้อนทับจุด D หรือจุด A' จะได้ภาพ EDE' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูป AFE

จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก BCE'F กว้าง $(3 + 2.8)$ หน่วย ยาว 6 หน่วย และมีพื้นที่ $= 5.8 \times 6 = 34.8$ ตารางหน่วย