

ทิวเข้มเต็มเต็มความรู้

คณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

อ.ชัยรัตน์ เจริญราษฎร์ติกร

จำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

กำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$ และ i ถูกเรียกว่าหนึ่งหน่วยจินตภาพ (Unit of imaginary)

การหาค่าของ i^n

ทดลองหาค่า i^n เพื่อหาผลสรุป				การหาค่าของ i^n แบบทั่วไป
กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3	กลุ่มที่ 4	
$i^1 = \dots$	$i^2 = \dots$	$i^3 = \dots$	$i^4 = \dots$	ให้เอาเลขชี้กำลัง n หารด้วย ถ้าเหลือเศษ 1 แล้วค่าของ $i^n = \dots$ เหลือเศษ 2 แล้วค่าของ $i^n = \dots$ เหลือเศษ 3 แล้วค่าของ $i^n = \dots$ ลงตัวพอดี แล้วค่าของ $i^n = \dots$
$i^5 = \dots$	$i^6 = \dots$	$i^7 = \dots$	$i^8 = \dots$	
$i^9 = \dots$	$i^{10} = \dots$	$i^{11} = \dots$	$i^{12} = \dots$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Tip... จากกฎการหารลงตัวเรานำ $4|n$ มาใช้ได้กับการหาค่าของ i^n ได้อย่างรวดเร็วคือ ให้นำ.....ของ n หารด้วย 4 ก็พอ

Ex.1 จงหาค่าของ i^n ต่อไปนี้อย่างรวดเร็วที่สุด

1. $i^{5,417} = \dots$

2. $i^{2,365,413} = \dots$

3. $i^{236,598,720} = \dots$

4. $i^{1,526,598,841} = \dots$

Ex.2 ค่าของ $\frac{i^{541} + i^{720} + i^{983} + i^{1000}}{i^{481} + i^{523} + i^{624} + i^{780}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1

2. -1

3. i

4. $-i$

เทคนิคการยกกำลัง $(a+bi)^n$

การหาค่า $(a+bi)^n$ ถ้าเราใช้วิธีคิดแบบ $(a+bi)^n = \underbrace{(a+bi) \cdot (a+bi) \cdot (a+bi) \cdot \dots \cdot (a+bi)}_n$ ซึ่งเป็น

วิธีพื้นฐานจริงๆ นั้นไม่เหมาะสมกับการทำการทำข้อสอบแน่ เราจึงควรรู้จักเทคนิคต่างๆ ดังนี้

	เทคนิคทั่วไป	The Best Sol ⁿ
เมื่อ $a = \pm b$	$(a+bi)^n =$	
เมื่อ $a \neq \pm b$	$(a+bi)^n =$	

ตัวอย่างโจทย์ที่ $a = \pm b$

Ex.3 จงหาค่าของ $(1+i)^{10}$

เทคนิคทั่วไป	The Best Sol ⁿ
$(1+i)^{10} = \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$	$(1+i)^{10} = \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$

Ex.4 จงหาค่าของ $(a+bi)^n$ ให้เร็วที่สุด

1. $(1-i)^{10} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

2. $(1+i)^{20} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

3. $(2-2i)^6 = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

4. $(1+i)^{15} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

Ex.5 ค่าของ $(-1+i)^{10}$ คือข้อใด

1. 32 2. -32 3. $32i$ 4. $-32i$

Ex.6 ค่าของ $(1-i)^{10} + (2+2i)^5$ คือข้อใด

1. $128-160i$ 2. $-128-160i$ 3. $160-128i$ 4. $-160-128i$

Ex.7 $Z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{100}$ แล้วค่าของ $Z^{2556} + \frac{1}{Z^{2556}}$ เท่ากับเท่าใด

1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

ตัวอย่างโจทย์ที่ $a \neq \pm b$

Ex.8 จงฝึกหาค่าของ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)^3$ และสรุปผลเพื่อนำไปประยุกต์ใช้

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1. $(1+\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2. $(1-\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3. $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4. $(-1 - \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

Tip... สูตรค่าของ $(\pm\sqrt{3} \pm i)^3$ หรือ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)^3$ มักจะถูกนำมาออกเป็นข้อสอบ เราสามารถหาค่าได้อย่างรวดเร็วโดยใช้หลัก “ เท่า ไม่เอา ”

Ex.9 จงหาค่าของ $(\pm\sqrt{3} \pm i)^3$ หรือ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)^3$ ให้เร็วที่สุด

1. $(1 + \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$ 5. $(\sqrt{3} + i)^3 = \dots\dots\dots$

2. $(1 - \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$ 6. $(\sqrt{3} - i)^3 = \dots\dots\dots$

3. $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$ 7. $(-\sqrt{3} + i)^3 = \dots\dots\dots$

4. $(-1 - \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$ 8. $(-\sqrt{3} - i)^3 = \dots\dots\dots$

Ex.10 ให้ $Z = -1 - \sqrt{3}i$ แล้ว $Z^6 + Z^{-6}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2^{12} + 1}{2^6}$ 2. $\frac{2^{12} - 1}{2^6}$ 3. $\frac{2^6 + 1}{2^{12}}$ 4. $\frac{2^6 + 1}{2^{12}}$

Ex.11 ให้ a, b, c และ $1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 15x + 20 = 0$ ค่าของ $(a + b + c)^3$ ตรงกับข้อใด

1. -8 2. 8 3. $-8i$ 4. $8i$

Tip... สรุปค่าของ $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i)^3$ หรือ $(\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ก็มักจะถูกนำมาออกเป็นข้อสอบ เราสามารถหาค่าได้อย่างรวดเร็วโดยใช้หลักเดิมๆคือ “..... เท่า ไม่เอา”

Ex.12 จงหาค่าของ $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i)^3$ หรือ $(\pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ให้เร็วที่สุด

1. $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$ 5. $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$

2. $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$ 6. $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$

3. $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$ 7. $(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$

4. $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$ 8. $(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$

Ex.13 กำหนดให้ $Z = \frac{i - \sqrt{3}}{2}$ จงหาค่าของ Z^{60}

1. 1 2. -1 3. i 4. $-i$

Ex.14 กำหนดให้ $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ค่าของ $x^{999} + y^{1,000}$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 4. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ex.18 กำหนดให้ $Z = 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$ แล้ว $\text{Re}(Z)$ คือข้อใด

1. -1 2. 15 3. -15 4. 1

Ex.19 ค่าของ $\sum_{n=1}^{1201} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Ex.20 ค่าของ $\sum_{n=1}^{1996} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ 2. $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$
3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

Ex.21 กำหนด $A = \sum_{n=1}^{480} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ และ $B = \sum_{n=1}^{480} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n$ ค่าของ $|A+B|$ เท่ากับเท่าใด

อินเวอร์สการคูณจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม กำหนดให้ $Z = a + bi$ อินเวอร์สการคูณของ Z จะคือ Z^{-1}

$Z^{-1} = \dots\dots\dots$

เมื่อคูณสังยุคเพื่อทำให้ส่วนเป็นจำนวนเต็มจะได้

$Z^{-1} = \dots\dots\dots$

เพื่อให้ง่ายแก่การใช้ เราตกลงจะท่องจำกันว่า.....

โปรดจำนะกฎข้อนี้ใช้บ่อยมาก $Z \cdot Z^{-1} = \dots\dots\dots$ เสมอ

Ex.22 จงฝึกหาอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน Z	ค่าของอินเวอร์สการคูณ (Z^{-1})
1. $Z = 3 + 4i$	$Z^{-1} =$
2. $Z = 2 - 5i$	$Z^{-1} =$
3. $Z = 3 - 2i$	$Z^{-1} =$
4. $Z = \cos\theta + i \sin\theta$	$Z^{-1} =$

Ex.23 กำหนดให้ $Z = i^9 + i^{10} + \dots + i^{126}$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว $2Z^{-1}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------|-------------|
| 1. $1 + i$ | 2. $1 - i$ |
| 3. $-1 + i$ | 4. $-1 - i$ |

เทคนิคการหารจำนวนเชิงซ้อน

การหารจำนวนเชิงซ้อน $\frac{a + bi}{c + di}$ นั้นทำได้ 2 วิธี คือ

1. วิธีทั่วไปเราจะทำได้โดยการคูณคู่สังยุค คือ $\frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

2. หารอย่างรวดเร็วโดย $\frac{a + bi}{c + di} =$

Ex.24 จงฝึกให้รู้จักพื้นฐานของการหารจำนวนเชิงซ้อน โดยวิธีการคูณด้วยคู่สังยุค

โจทย์	การหารจำนวนเชิงซ้อน โดยวิธีการคูณด้วยคู่สังยุค
1. $\frac{4+2i}{3+4i}$	$\frac{(4+2i) \cdot (3-4i)}{(3+4i) \cdot (3-4i)} =$
2. $\frac{2+3i}{4-5i}$	$\frac{(2+3i) \cdot (4+5i)}{(4-5i) \cdot (4+5i)} =$
3. $\frac{2+i}{3+4i}$	$\frac{(2+i) \cdot (3-4i)}{(3+4i) \cdot (3-4i)} =$
4. $\frac{2-i}{4+i}$	$\frac{(2-i) \cdot (4-i)}{(4+i) \cdot (4-i)} =$

Ex.25 จงฝึกหารจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้สั้นและรวดเร็วที่สุด

1. $\frac{4+2i}{3+4i} =$	2. $\frac{2+3i}{4-5i} =$	3. $\frac{2+i}{3+4i} =$
4. $\frac{3+4i}{-4+5i} =$	5. $\frac{2-3i}{3+4i} =$	6. $\frac{3-6i}{4+7i} =$

Ex.26 กำหนด Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $Z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1+2i}{1-2i}$ และ $Z^{-1} = a+bi$ จงหาค่าของ $a+b$

1. $-\frac{1}{3}$

2. $-\frac{2}{3}$

3. $\frac{1}{3}$

4. $\frac{2}{3}$

Ex.27 ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^{12}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -16 3. 16 4. 64

Ex.28 ค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$ คือ

1. $-1-i$ 2. $-1+i$ 3. $1-i$ 4. $1+i$

Ex.29 ค่าของ $\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2539}$ คือ

1. $-1-i$ 2. -1 3. $1-i$ 4. 1

Ex.30 ให้ a, b, c เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0$ ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. -1 2. 1 3. 2 4. 3