

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดย อาจารย์ รัชชัย มาเจริญทรัพย์

บทนำ

วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วยหมายถึงวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และมีรัศมียาวหนึ่งหน่วย เขียนความสัมพัทธ์ได้คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

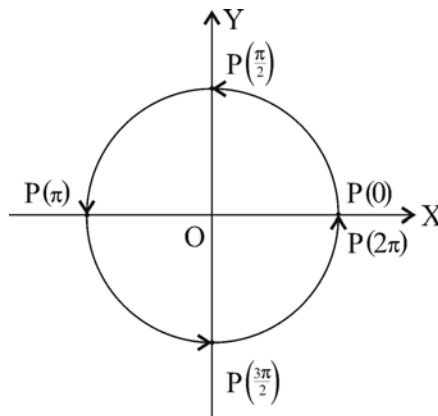
ความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

ถ้า θ เป็นจำนวนจริงใดๆ จุดปลายส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย คือ $P(\theta)$ โดยตกลงเงื่อนไขการวัดดังนี้

1. ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา
2. ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศตามเข็มนาฬิกา
3. ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ

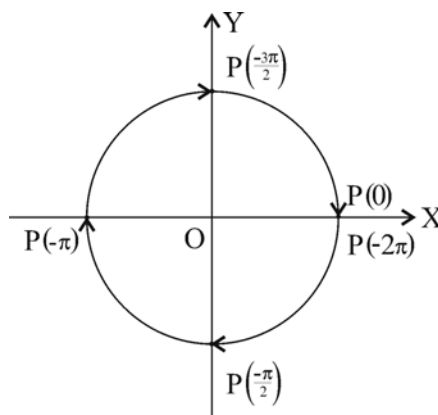
กรณี $\theta > 0$

หมุนทวนเข็มนาฬิกา



กรณี $\theta < 0$

หมุนตามเข็มนาฬิกา



1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

บทนิยาม เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
 ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือ $\{(\theta, y) \mid y = \sin \theta\}$
 และฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือ $\{(\theta, x) \mid x = \cos \theta\}$

จาก $x^2 + y^2 = 1$

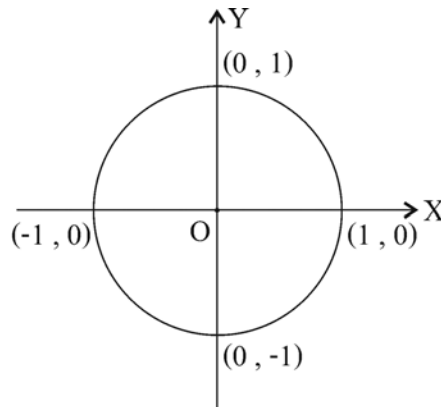
ดังนั้น $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

เนื่องจาก $-1 \leq x \leq 1$ และ $-1 \leq y \leq 1$

ดังนั้น $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ และ $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

1.1. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ หาได้โดยดูจากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย



เนื่องจาก $x = \sin \theta$ และ $y = \cos \theta$

ดังนั้น $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\sin \pi = 0$ $\cos \pi = -1$

$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$\sin 2\pi = 0$ $\cos 2\pi = 1$

ค่าที่ควรจำ

θ			
ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $\theta > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\sin(n\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(n\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(n\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(n\pi + \theta) = -\cos \theta$$

2. ถ้า $\theta > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

$$\sin(n\pi - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(n\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\sin(n\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(n\pi + \theta) = \cos \theta$$

จาก $\sin(n\pi - \theta)$ และ $\cos(n\pi - \theta)$

ถ้า $n=0$ จะได้

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

และ $\cos(-\theta) = \cos \theta$

1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

จากความสัมพันธ์ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (*)

ถ้า $\sin^2\theta \neq 0$ เมื่อนำ $\sin^2\theta$ มาหารสมการ (*) ทั้งสองข้าง

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

และถ้า $\cos^2\theta \neq 0$ เมื่อนำ $\cos^2\theta$ มาหาร สมการ (*) ทั้งสองข้าง

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

1.4 การเขียนฟังก์ชันตรีโกณให้ความยาวส่วนโค้งอยู่ระหว่าง 0 กับ $\frac{\pi}{2}$

สรุปได้ดังนี้

$$1) \text{ ฟังก์ชัน (แกนนอน } \pm \theta) = \pm \text{ ฟังก์ชัน } \theta$$

- ฟังก์ชันหมายถึงฟังก์ชัน \sin , \cos , \tan , \sec , cosec หรือ \cot
- แกนนอนหมายถึงความยาวส่วนโค้งที่จุดปลายส่วนโค้งตกบนแกน X
เช่น $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$
- เครื่องหมาย \pm ของฟังก์ชัน θ ให้ดูว่าฟังก์ชันเดิมจุดปลายส่วนโค้งตกในจตุภาคใด

$$2) \text{ ฟังก์ชัน (แกนตั้ง } \pm \theta) = \pm \text{ โคฟังก์ชัน } \theta$$

- แกนตั้งหมายถึงความยาวส่วนโค้งที่จุดปลายส่วนโค้งตกบนแกน Y
เช่น $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{-\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \dots$
- ฟังก์ชัน โคฟังก์ชัน

\sin	\cos
\tan	\cot
\sec	cosec

$$3) \begin{aligned} \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta \\ \operatorname{cosec}(-\theta) &= -\operatorname{cosec} \theta \end{aligned}$$

1.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

การวัดมุม

1. ระบบองศา

$$1 \text{ องศา} = 60 \text{ ลิปดา}$$

$$1 \text{ ลิปดา} = 60 \text{ พิลิปดา}$$

2. ระบบเรเดียน

มุม 1 เรเดียน คือมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลาง 1 รอบวงกลมเท่ากับ 360 องศา

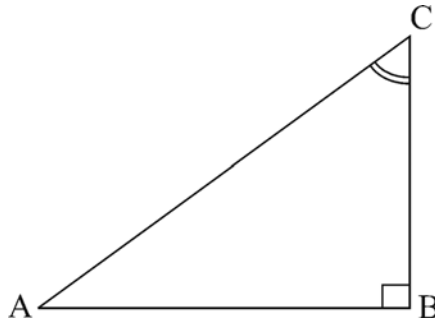
$$\text{ดังนั้น } \boxed{2\pi \text{ เรเดียน} = 360 \text{ องศา}}$$

1.6 การเปลี่ยนหน่วยการวัด

$$(1) \text{ มุมในหน่วยเรเดียน} = \text{มุมที่ต้องการเปลี่ยนของหน่วยองศา} \times \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$(2) \text{ มุมในหน่วยองศา} = \text{มุมที่ต้องการเปลี่ยนของหน่วยเรเดียน} \times \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ด้าน AB เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม C

ด้าน BC เรียกว่า ด้านประชิดมุม C

ด้าน AC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$(1) \sin C = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม C}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \cos C &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } C}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AC} \\
 (3) \tan C &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } C}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } C} = \frac{AB}{BC} \\
 (4) \cot C &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } C}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } C} = \frac{BC}{AB} \\
 (5) \sec C &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } C} = \frac{AC}{BC} \\
 (6) \operatorname{cosec} C &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } C} = \frac{AC}{AB}
 \end{aligned}$$

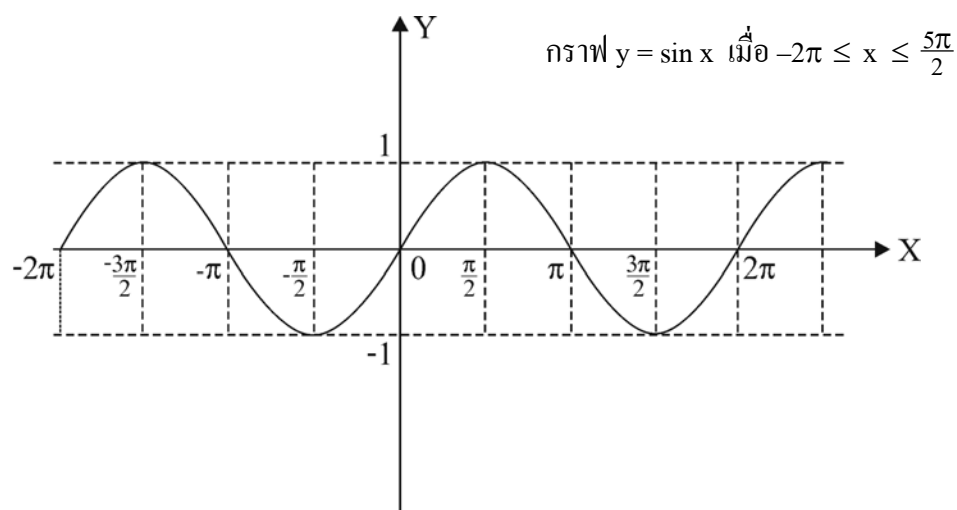
1.8 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ กล่าวคือ เมื่อแบ่งแกน X ออกเป็นช่วงย่อย โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน เรียกความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าว คาบของฟังก์ชันถ้าฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและต่ำสุด เราเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า แอมพลิจูด

กราฟของฟังก์ชันไซน์

เนื่องจาก $\text{sine} = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$ หรือเขียน $y = \sin x$

กราฟของ $y = \sin x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับ 1 และ 1 คาบยาว 2π เขียนกราฟได้ดังนี้



ข้อสังเกต

กราฟของ $y = \sin x$

- (1) เป็นกราฟต่อเนื่อง
- (2) โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- (3) กราฟผ่านจุด $(0, 0)$ เสมอ

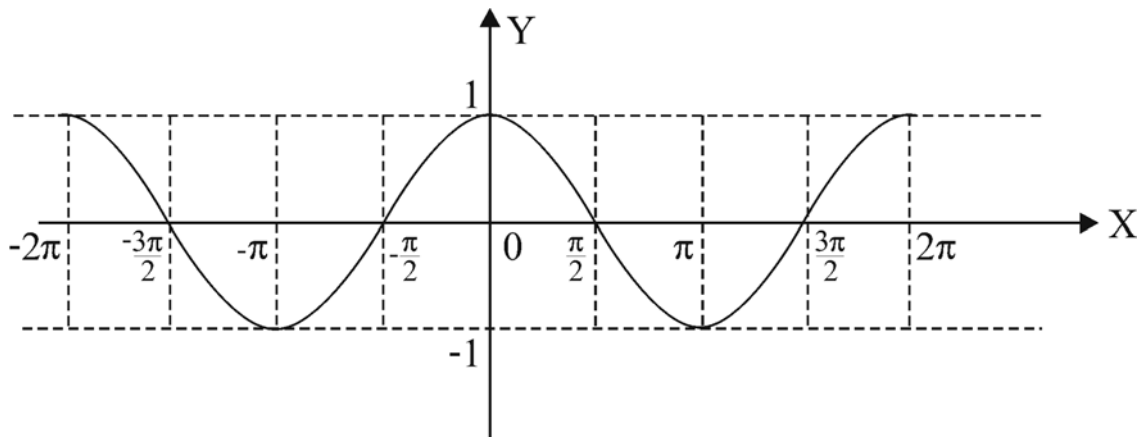
กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

เนื่องจาก cosine = $\{(x, y) \mid y = \cos x\}$ หรือเขียน $y = \cos x$

กราฟของ $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับ 1 และ 1 คาบยาว 2π

เขียนกราฟได้ดังนี้

กราฟ $y = \cos x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$



ข้อสังเกต

กราฟของ $y = \cos x$

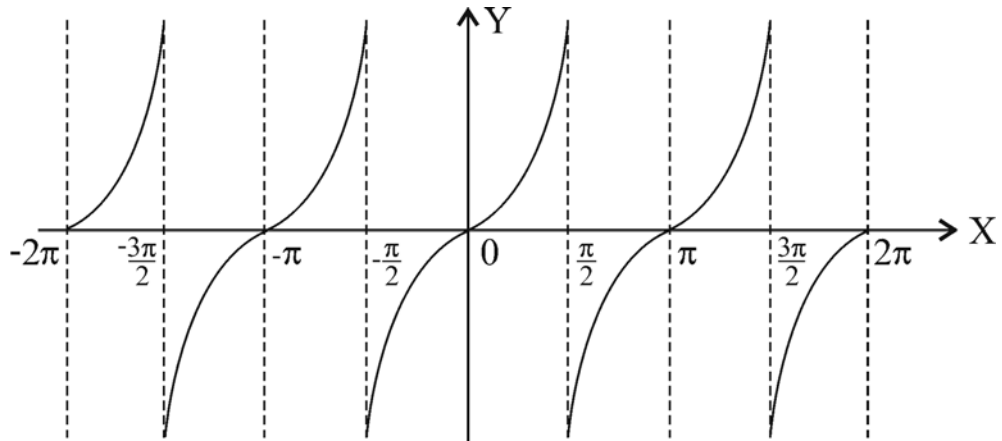
- (1) เป็นกราฟต่อเนื่อง
- (2) โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- (3) กราฟผ่านจุด $(0, 1)$

กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์

เนื่องจาก tangent = $\{(x, y) \mid y = \tan x \text{ และ } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in I\}$

หรือเขียน $y = \tan x$

กราฟของ $y = \tan x$ ไม่มีแอมพลิจูด 1 คาบยาว π เขียนกราฟได้ดังนี้



กราฟ $y = \tan x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

ข้อสังเกต

- (1) กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ไม่เป็นกราฟต่อเนื่อง
- (2) โดเมนของฟังก์ชันคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$ และเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นเซตของจำนวนจริง

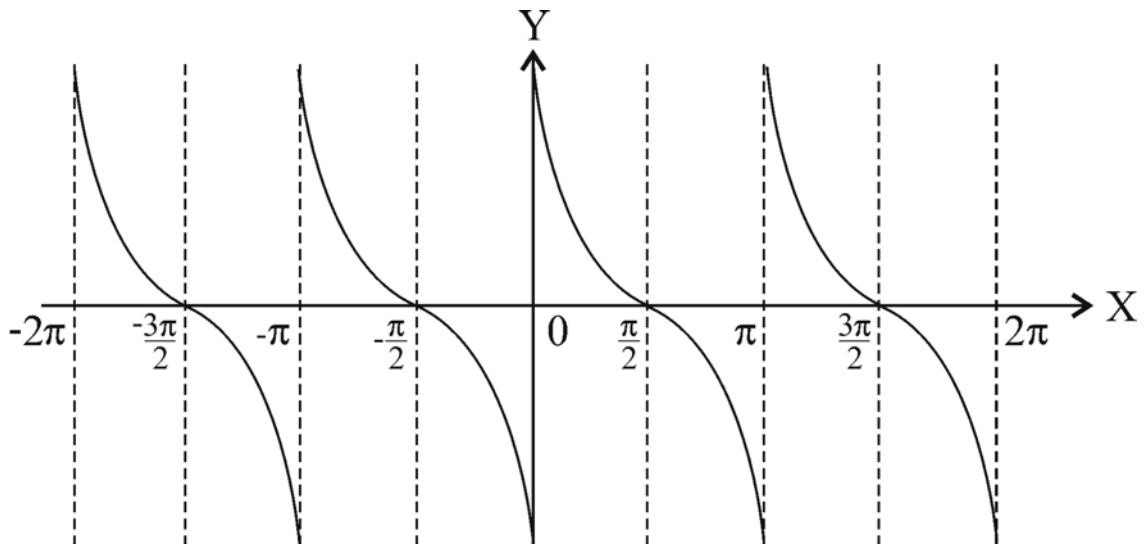
กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

เนื่องจาก $\cotangent = \{(x, y) \mid y = \cot x \text{ และ } x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$

หรือเขียน $y = \cot x$

กราฟของ $y = \cot x$ ไม่มีแอมพลิจูด 1 ควบ ขาว π

เขียนกราฟได้ดังนี้



กราฟ $y = \cot x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

ข้อสังเกต

- (1) กราฟของฟังก์ชัน โคแทนเจนต์ไม่เป็นกราฟต่อเนื่อง

(2) โดเมนของฟังก์ชันคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$ เรนจ์ของฟังก์ชันเป็นเซตของจำนวนจริง

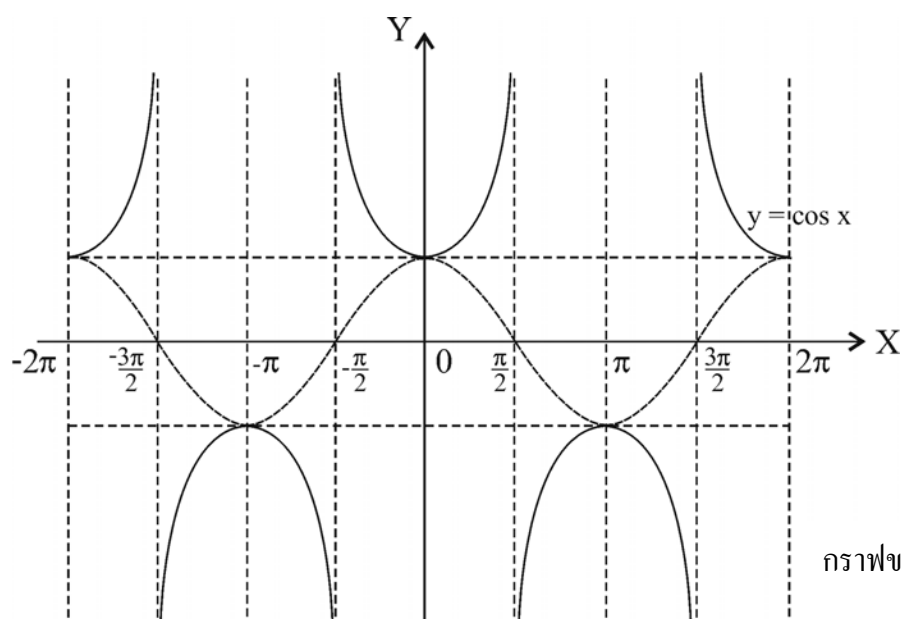
กราฟของฟังก์ชันเซกแคน

เนื่องจาก $\secant = \{(x, y) \mid y = \sec x \text{ และ } x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$

หรือเขียน $y = \sec x$

กราฟของ $y = \sec x$ ไม่มีแอมพลิจูด 1 คาบ ยาว 2π

เขียนกราฟได้ดังนี้



กราฟของ $y = \sec x$ คือกราฟเส้นทึบ

ข้อสังเกต

(1) กราฟของฟังก์ชันเซกแคนเป็นกราฟไม่ต่อเนื่อง

(2) โดเมนของฟังก์ชันคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$ เรนจ์ของฟังก์ชันคือ $\{x \mid x \leq -1$
หรือ $x \geq 1\}$

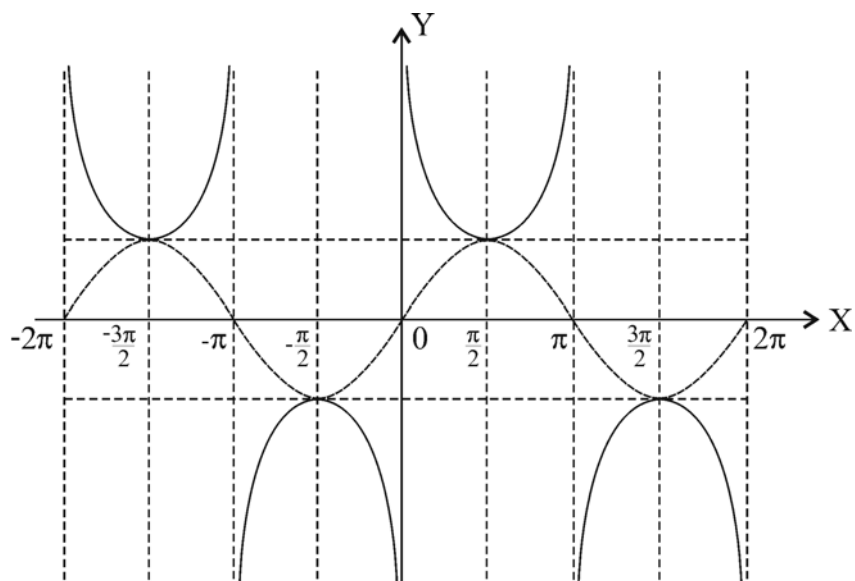
กราฟของฟังก์ชันโคเซกแคน

เนื่องจาก $\text{cosecant} = \{(x, y) \mid y = \text{cosec } x \text{ และ } x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$

หรือเขียน $y = \text{cosec } x$

กราฟของ $y = \text{cosec } x$ ไม่มีแอมพลิจูด 1 คาบ ยาว 2π

เขียนกราฟได้ดังนี้



กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ คือกราฟเส้นทึบ

ข้อสังเกต

- (1) กราฟของฟังก์ชันโคเซกแคนเป็นกราฟไม่ต่อเนื่อง
- (2) โดเมนของฟังก์ชันคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ $\{x \mid x \leq -1 \text{ หรือ } x \geq 1\}$

2.

2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

1. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
3. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
4. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
5. $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
6. $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
7. $\cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$
8. $\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

2.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

ถ้า A เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$1. \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$2. \quad \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$3. \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$4. \quad \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$5. \quad \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$6. \quad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$7. \quad \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

2.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของครึ่งหนึ่งของจำนวนจริงหรือมุม

ถ้า A เป็นจำนวนจริง หรือมุมใดๆ แล้ว

$$1. \quad \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$2. \quad \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$3. \quad \tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$4. \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

หมายเหตุ ข้อ 1, 2 และ 3 จะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับ $\frac{A}{2}$ ว่าอยู่ในจุดภาคใด

2.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

ถ้า A เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$1. \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$2. \quad \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$3. \quad \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

2.5 การเปลี่ยนผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เป็นผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชัน

ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$1. \quad 2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2. \quad 2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$3. \quad 2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$4. \quad 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

การเปลี่ยนผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เป็นผลคูณของฟังก์ชัน

ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$1. \sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2. \sin A - \sin B = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$3. \cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$4. \cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

3. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันให้เหมาะสมจะพบว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

โดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติสรุปได้ดังตาราง

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arcsin	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan	\mathbb{R}	
arccot	\mathbb{R}	$(0, \pi)$
arcsec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
arccosec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcsec} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccosec} \frac{1}{x}$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริงเมื่อ $x > 0$

3.2 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน และอินเวอร์สของฟังก์ชัน

1) $\sin(\arcsin x)$	=	x เมื่อ	$-1 \leq x \leq 1$
2) $\arcsin(\sin x)$	=	x เมื่อ	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
3) $\cos(\arccos x)$	=	x เมื่อ	$-1 \leq x \leq 1$
4) $\arccos(\cos x)$	=	x เมื่อ	$0 \leq x \leq \pi$
5) $\tan(\arctan x)$	=	x เมื่อ	$x \in \mathbb{R}$
6) $\arctan(\tan x)$	=	x เมื่อ	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
7) $\cot(\operatorname{arccot} x)$	=	x เมื่อ	$x \in \mathbb{R}$
8) $\operatorname{arccot}(\cot x)$	=	x เมื่อ	$0 < x < \pi$
9) $\sec(\operatorname{arcsec} x)$	=	x เมื่อ	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
10) $\operatorname{arcsec}(\sec x)$	=	x เมื่อ	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
11) $\operatorname{cosec}(\operatorname{arccosec} x)$	=	x เมื่อ	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
12) $\operatorname{arccosec}(\operatorname{cosec} x)$	=	x เมื่อ	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

3.3 ความสัมพันธ์ของอินเวอร์สของฟังก์ชันอื่นๆ ที่ควรรจำ

1) $\arctan x + \arctan y$	=	$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
2) $\arctan x - \arctan y$	=	$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$
3) $2 \arctan x$	=	$\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$
4) $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y$	=	$\operatorname{arccot}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)$
5) $\operatorname{arccot} x - \operatorname{arccot} y$	=	$\operatorname{arccot}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$
6) $2 \operatorname{arccot} x$	=	$\operatorname{arccot}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$
7) $\arcsin x + \arccos x$	=	$\frac{\pi}{2}$
8) $\arctan x + \operatorname{arccot} x$	=	$\frac{\pi}{2}$
9) $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x$	=	$\frac{\pi}{2}$

4. สมการตรีโกณมิติ

สมการตรีโกณมิติคือการหาจำนวนจริงหรือมุมของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยดูจากเงื่อนไขที่กำหนด
ในกรณีโจทย์ไม่กำหนดช่วงคำตอบจะต้องตอบในรูปทั่วไป

คำตอบในรูปทั่วไป

1. ให้ x เป็นคำตอบทั่วไปของสมการที่มีค่าฟังก์ชัน \sin หรือ cosec

$$x = 2n\pi + \theta$$

เมื่อ $n \in I$ และ θ เป็นคำตอบทั้งหมดของสมการในช่วง

หรือ
$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \theta$$

เมื่อ $n \in I$ และ θ เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดหรือศูนย์

2. ให้ x เป็นคำตอบทั่วไปของสมการที่มีค่าฟังก์ชัน \cos หรือ \sec

$$x = 2n\pi \pm \theta$$

เมื่อ $n \in I$ และ θ เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดหรือศูนย์

3. ให้ x เป็นคำตอบทั่วไปของสมการที่มีค่าฟังก์ชัน \tan หรือ \cot

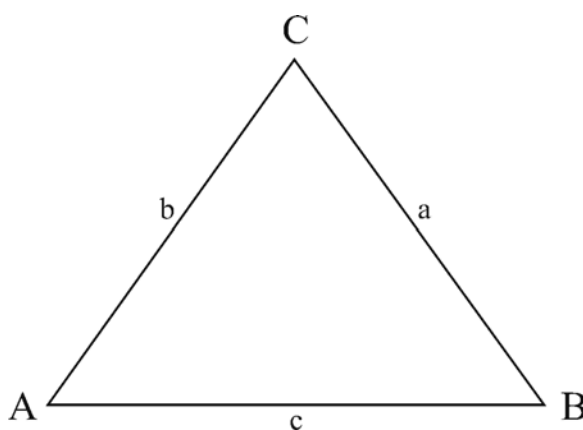
$$x = n\pi + \theta$$

เมื่อ $n \in I$ และ θ เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดหรือศูนย์

5. การแก้สามเหลี่ยม

การแก้สามเหลี่ยมคือการหาส่วนต่างๆ ของสามเหลี่ยมนอกเหนือจากที่กำหนดมาให้

5.1 กฎของ cosine



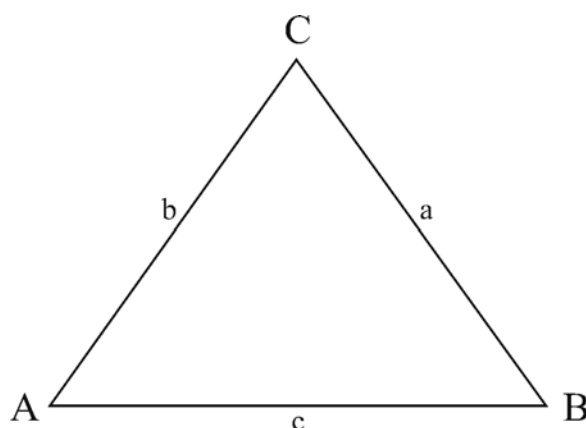
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

กฎนี้ใช้ในการแก้สามเหลี่ยมเมื่อโจทย์กำหนดด้านมาให้ 2 ด้าน และกำหนดมุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสองมาให้

กรณีที่โจทย์กำหนดด้านทั้งสามมาให้เราสามารถหามุมแต่ละมุมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\end{aligned}$$

5.2 กฎของ sine



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎนี้ใช้ในการแก้สามเหลี่ยมเมื่อ โจทย์กำหนด

- (1) ความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสอง มุมใดมุมหนึ่งมาให้
- (2) ขนาดของมุม 2 มุมและความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสอง มุมใดมุมหนึ่งมาให้

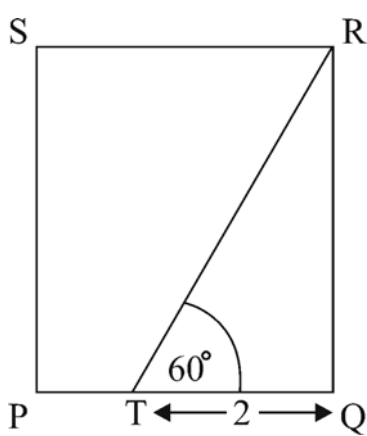
ตัวอย่างข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี A เป็นมุมฉาก และ $\tan B = \frac{3}{4}$ แล้ว ค่าของ $\sec C \cot B \operatorname{cosec} A$ คือข้อใดต่อไปนี (Ent. คณิต 2 ตุลาคม ค.ม 2543)
1. 0
 2. $\frac{9}{20}$
 3. $\frac{4}{5}$
 4. $\frac{20}{9}$

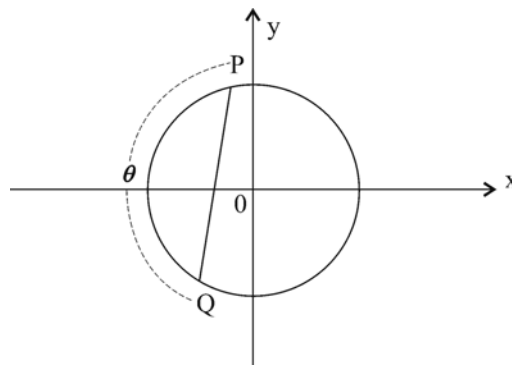
2. กำหนด T เป็นจุดบน PQ ของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส PQRS ดังรูป ถ้า TQ มีความยาว 2 หน่วย และมุม RTQ เท่ากับ 60° แล้ว พื้นที่ของสี่เหลี่ยม PQRS เท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. คณิต 2

มี



1. $2\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ตารางหน่วย
3. 12 ตารางหน่วย
4. 8 ตารางหน่วย

3. กำหนดให้วงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้า θ เป็นความยาวของส่วนโค้ง PQ ดังรูป แล้วความยาวของคอร์ด PQ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. คณิต ก ข ปี 2532)



1. $\sqrt{2 - 2\cos \theta}$
2. $\sqrt{2 + 2\cos \theta}$
3. $\sqrt{2 - 2\sin \theta}$
4. $\sqrt{2 + 2\sin \theta}$

4. กำหนดให้ $y_1 = \sin x$ และ $y_2 = \cos x$ เมื่อ $x \in [0, 2\pi]$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้จะทำให้ $y_1 < 0$ และ $y_2 < 0$ ตลอดช่วง (Ent. ค ณิต 2 มี น ๗ ค ม 2544)

1. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 2. $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 3. $(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ 4. $(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$

5. ถ้า $\sin \theta - \cos \theta = a$ แล้ว $\sin \theta \cos \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. ค ณิต 2 ต ล ๗ ค ม 2543)

1. $\frac{1-a^2}{2}$ 2. $\frac{1+a^2}{2}$
3. $\frac{1-a}{2}$ 4. $\frac{1+a}{2}$

6. $-\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \sin^2 3^\circ + \dots - \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. ค ณิต 1 มี น ๗ ค ม 2545)

7. ถ้า $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\tan^2 B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. ค ณิต 1 ต ล ๗ ค ม 2546)

1. 4 2. $\frac{3}{2}$ 3. 1 4. $\frac{2}{3}$

8. ถ้า $\sin 15^\circ + \sin 55^\circ = x$ และ $\cos 15^\circ + \cos 55^\circ = y$ แล้ว $(x+y)^2 - 2xy$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. ค ณิต 1 ต ล ๗ ค ม 2544)

1. $4 \cos 20^\circ$ 2. $2 \cos 20^\circ$ 3. $4 \cos 40^\circ$ 4. $2 \cos 40^\circ$

9. ให้ O เป็นจุดกำเนิด A เป็นจุดบนแกน X และ B เป็นจุดในระนาบ ซึ่งทำให้เส้นตรง OB มีความชันเท่ากับ 2 และเส้นตรง AB มีความชันเท่ากับ 1 ถ้า $\theta = \angle ABO$ แล้ว $\sec^2 \theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. ค ณิต 1 ต ล ๗ ค ม 2542)

1. $\frac{10}{9}$ 2. $\frac{11}{9}$ 3. 10 4. 11

10. $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (Ent. ค ณิต กข ปี 254 1)

1. $\frac{-1}{1+\sqrt{3}}$ 2. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ 3. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

11. กำหนดให้ $5\cos 3A \cos A + 5\sin 3A \sin A = -3$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\tan A$ (Ent. คณิต 1 ปี 2 5 40)
1. $\frac{10}{9}$ 2. 1 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2
12. ค่าของ $\frac{1}{8} \sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต ก ข ปี 2533)
1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{1}{16}$
3. $\frac{1}{32}$ 4. $\frac{1}{64}$
13. ถ้า $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ แล้ว $\arccos x - \arctan 2x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มี น ๗ ค ม 2546)
1. $\frac{\pi}{12}$ 2. $\frac{5\pi}{12}$ 3. $\frac{7\pi}{12}$ 4. $\frac{11\pi}{12}$
14. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $\sin(2 \arcsin x) = x$ โดยที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $[\sin \arctan(ab)]$ เท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต 1 ตู ล ๗ ค ม 2545)
15. จำนวนสมาชิกของเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x - x^2) = \arcsin x + \arcsin(x - 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 ปี 2 5 40)
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4
16. $\sec \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{3}{5} \right) \right] + \tan \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{4}{5} \right) \right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มี น ๗ ค ม 2543)
1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $1 + \sqrt{2}$ 4. $2 + \sqrt{3}$
17. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 ปี 2 5 40)
1. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right\}$ 2. $\left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6} \right\}$
3. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2} \right\}$ 4. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

18. ผลบวกของคำตอบของสมการ $2 \cos \theta + 1 = \sec \theta$

เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 2 มี น ๑ ค ม 2544)

1. $\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{2\pi}{3}$ 3. π 4. $\frac{4\pi}{3}$

19. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เซตคำตอบของสมการ $\frac{\cos^2 \theta - \cos \theta}{\sin \theta - \frac{1}{2}} < 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

(Ent. คณิต 1 มี น ๑ ค ม 2545)

1. $(0, \frac{\pi}{3})$ 2. $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$
3. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$ 4. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

20. ผลรวมของคำตอบของสมการ $2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x - 3 = 0$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

(Ent. คณิต 2 มี น ๑ ค ม 2543)

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{2}$ 4. $\frac{2\pi}{3}$

21. $\{\cos A \mid 0 \leq A \leq \frac{4\pi}{3} \text{ และ } 5 - 3\sin 3A \text{ มีค่ามากที่สุด}\}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

(Ent. คณิต 1 ต ล ๑ ค ม 2542)

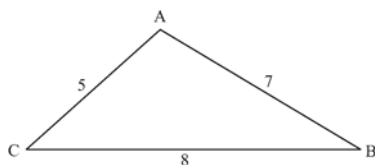
1. $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 2. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$
3. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 4. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

22. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $A = 30^\circ$ ด้าน BC ยาว 2 เซนติเมตร และด้าน AC ยาว 3 เซนติเมตร แล้ว

$4 \sin 3B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (Ent. คณิต 1 มี น ๑ ค ม 2546)

23.

254.



ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมคี่งรูป

ค่า $\sin^2 \frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต ก ข ปี

1. $\frac{3}{28}$ 2. $\frac{7}{28}$
3. $\frac{12}{28}$ 4. $\frac{21}{28}$

24. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุม $BAC = 45^\circ$ มุม $ACB = 60^\circ$ และด้าน AC ยาว 20 นิ้ว แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มีนา คม 2543)

1. $\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ ตารางหน่วย

25. นายคำยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่งมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° แต่เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 20 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 75° ในขณะที่เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° นั้นเขายืนอยู่ห่างจากเสาธงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 ตุลาคม คม 2545)

1. $10(2 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$ เมตร
2. $10(2 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ เมตร
3. $10(2 + 2\sqrt{3})$ เมตร
4. $10(2 + \sqrt{3})$ เมตร

26. นายแดงนั่งอยู่บนคาค้ำของโรงแรมริมหาดแห่งหนึ่ง สังเกตเห็นเรือสองลำทอดสมอยู่ในทะเลเป็นมุมกัม x และ y ตามลำดับ จากเส้นระดับสายตาเส้นเดียวกัน ถ้าเรือทั้งสองอยู่ห่างกัน Z ฟุต แล้วคาค้ำโรงแรมแห่งนี้สูงจากระดับน้ำทะเลเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(Ent. คณิต ก ข ปี 2 5 3 1)

1. $\frac{Z}{2} \operatorname{cosec}(x-y)[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
2. $\frac{Z}{2} \operatorname{cosec}(x-y)[\cos(x-y) - \cos(x-y)]$
3. $\frac{Z}{2} [\cot(x-y) - \cot(x+y)]$
4. $\frac{Z}{2} [\cot(x+y) - \cot(x-y)]$

เฉลยคำตอบ

1) 4	2) 3	3) 1	4) 3	5) 1	6) 0.5	7) 2
8) 1	9) 1	10) 2	11) 4	12) 4	13) 1	14) 0.6
15) 1	16) 3	17) 3	18) 4	19) 4	20) 5π	21) 2
22) 2.25	23) 1	24) 4	25) 4	26) 2		