เมตริกซ์

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

1. AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA
2. $A(BC) = (AB)C = ABC$
3. $AI = A = IA$
4. $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

การแจกแจง

1. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
2. $(B \pm C)A = BA \pm CA$

ทรานสโพสของเมตริกซ์

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$
4. $(kA)^t = kA^t$
5. $(A^n)^t = (A^t)^n$

อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}; k \neq 0$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

การหา det

เมตริกซ์ขนาด 1×1 $A = [a]$ จะได้ $\det A = a$

คูณขึ้นเครื่องหมายตรงข้าม

เมตริกซ์ขนาด 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

คูณลงเครื่องหมายเหมือนเดิม

คูณขึ้นเครื่องหมายตรงข้าม

เมตริกซ์ขนาด 3×3 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

คูณลงเครื่องหมายเหมือนเดิม

ดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$; $\det A \neq 0$
3. $\det(A^t) = \det A$
4. $\det(kA) = k^n \det A$; n คือ มิติของเมตริกซ์ A
5. $\det(A^n) = (\det A)^n$
6. ถ้า A = B แล้ว det A = det B *****
7. ถ้า det A = det B แล้ว ไม่จำเป็นที่ A = B *****
8. ถ้าสมาชิกของเมตริกซ์ที่กำหนดให้มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ทั้งหมด บอกได้ทันทีว่า det ของเมตริกซ์นั้นเท่ากับ 0

   เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

9. ถ้าสมาชิกของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ในสองแถวใด หรือสองหลักใดเท่ากันบอกได้ทันทีว่า det ของเมตริกซ์นั้นเท่ากับ 0

   เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

10. ถ้าเมตริกซ์ใดที่กำหนดให้เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนหรือสามเหลี่ยมล่างหรือเมตริกซ์เฉียงบอกได้ทันทีว่า det ของเมตริกซ์นั้น เท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในเส้นทะแยงมุมหลัก

    เช่น $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30$

11. ถ้าสมาชิกในสองแถวใด หรือสองหลักใดเป็น c เท่าของกันและกันแล้วจะได้ det = 0

เช่น $\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{5 \quad 10 \quad 15} \\ 4 \quad 1 \quad 7 \end{vmatrix} = 0$

12. ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งของเมตริกซ์ A จะได้ว่า det B = - det A

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ det B = - det A

ไมเนอร์ (Minor) และ โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

Minor : $M_{ij}(A)$ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ออก

Cofactor : $C_{ij}(A)$ คือ $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

เมตริกซ์ขนาด 1×1 จะได้ $A = [a]$ จะได้ $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

เมตริกซ์ขนาด 2×2 จะได้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0$

เมตริกซ์ขนาด 3×3 ขึ้นไปหา A^{-1} จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A) \quad \text{โดย} \quad \operatorname{adj} A = [C_{ij}(A)]^t$$

นิยามที่เกี่ยวกับอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

1. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A)$ เรียก adj A ว่าเมตริกซ์ผูกพันของ A
2. ถ้า A หา A^{-1} ไม่ได้เรียก A ว่า Singular Matrix หรือ เมตริกซ์เอกฐาน $(\det A = 0)$
3. ถ้า A หา A^{-1} ได้ เรียก A ว่า Non-Singular Mastrix หรือ เมตริกซ์มิใช่เอกฐาน $(\det A \neq 0)$

การใช้ Cofactor ในการหา det ของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

ขั้นตอนการหา det

1. เลือกแถวหรือหลักมา 1 แถว หรือ 1 หลัก
2. หา Cofactor ของสมาชิกแต่ละตัวในแถวหรือหลักที่เลือกมา
3. เอาสมาชิกในตำแหน่งนั้น คูณกับ Cofactor ของสมาชิกในตำแหน่งนั้นแล้ว นำมาบวกกันผลที่ได้คือค่าของ det

ระบบสมการเชิงเส้น

กำหนดสมการเชิงเส้น n สมการ n ตัวแปร ดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad \dots\dots\dots\dots (n)$$

เราสามารถเขียนสมการ n สมการ n ตัวแปรให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

เรียก เมตริกซ์ A ว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์
X ว่าเมตริกซ์ตัวแปร
B ว่าเมตริกซ์ค่าคงที่

ถ้า $\det A \neq 0$ ระบบสมการเชิงเส้นมีคำตอบ 1 ชุด

ถ้า $\det A = 0$ คำตอบของระบบสมการให้พิจารณาดังนี้

- ถ้าคำตอบอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ระบบสมการมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน
- ถ้าคำตอบอยู่ในรูป $\frac{k}{0}$ โดย $k \neq 0$ ระบบสมการไม่มีคำตอบ

การดำเนินการตามแถว (Row Operation)

คือการดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. สลับที่ระหว่างแถวที่ i กับ แถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ เขียนแทนด้วย R_{ij}
2. คูณแถวที่ i ด้วยจำนวนจริง c โดย $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_i
3. แทนที่แถวที่ i ด้วยผลบวกของแถวที่ i กับ c เท่าของแถวที่ j โดยที่ $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$

<u>การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีของเกาส์</u> (Gaussian elemination)

ขั้นตอน 1. นำระบบสมการมาสร้างเป็นเมตริกซ์แต่งเติม

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

2. ให้ทำ $[A \mid B]$ ด้วย Row Operation จนทำให้ A เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

<u>ตัวอย่างการดำเนินการตามแถว</u>

<u>ตัวอย่าง</u> $R_2 + 2R_1$ หมายถึง นำแถวที่ 1 คูณ 2 แล้วบวกเข้าในแถวที่ 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 8 \\ -4 & -3 & 6 & -22 \\ 0 & 3 & 8 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 8 \\ (-4)+2(2) & (-3)+2(1) & (6)+2(-2) & (-22)+2(8) \\ 0 & 3 & 8 & -38 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 8 & -38 \end{array}\right]$$

<u>ตัวอย่าง</u> R_{12} หมายถึง สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 , $\frac{1}{14}R_3$ หมายถึงนำ $\frac{1}{14}$ คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12},\frac{1}{14}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

กำหนดการเชิงเส้น

<u>กำหนดการเชิงเส้น</u> เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่นำมาประยุกต์ใช้ในทางธุรกิจ ซึ่งเป็นเครื่องมือของฝ่ายบริหาร สำหรับประกอบการตัดสินใจในแง่ของผลประโยชน์ต่างๆ อันได้แก่ แรงงาน, วัตถุดิบ, เวลา, สถานที่ และทรัพยากรต่างๆ ที่มีอยู่จำกัดให้เกิดผลประโยชน์มากที่สุด

<u>โครงสร้างของกำหนดการเชิงเส้น</u> สามารถแยกเป็นส่วนๆ ได้ดังนี้

1. ตัวแปรที่ตัดสินใจ (Decision Variable) หมายถึง ระดับหรือจำนวนกิจกรรมต่างๆ ที่ใช้เป็นทางเลือกของปัญหาที่จะตัดสินใจ เช่น ปริมาณวัตถุดิบที่จะป้อนเข้าสู่โรงงาน, ปริมาณสินค้าที่จะผลิต ฯลฯ

2. ฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective Function) คือ สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ และผลการตัดสินใจ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของต้นทุน, กำไร, ระยะเวลา ฯลฯ

โดยทั่วไปเป้าหมายของนักธุรกิจ ก็คือ การเลือกตัวแปรที่ทำให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายดีที่สุด กล่าวคือ

1. เป้าหมายสูงสุด (Maximize) เช่น กำไรสูงสุด
2. เป้าหมายต่ำสุด (Minimize) เช่น ต้นทุนต่ำสุด

3. ข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่างๆ (Constraint or Restriction) ตัวแปรที่ตัดสินใจจะเป็นการตัดสินใจภายใต้ข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่างๆ ซึ่งมักจะอยู่ในรูปของอสมการ เช่น ให้ x แทนต้นทุนการผลิตสินค้าชนิดที่ 1, y แทนต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดที่ 2 โดยต้นทุนในการผลิตสินค้าทั้งสองต้องไม่เกินวันละ 1000 บาท จะต้องเขียนข้อจำกัดได้คือ $x + y \le 1000$

<u>การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น</u>

ในกรณีที่ปัญหามีเพียง 2 ตัวแปร วิธีการที่ง่ายและใช้ได้ดี คือวิธีกราฟ (Graphical Method) โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. นำข้อมูลที่มีอยู่มากำหนดฟังก์ชันเป้าหมายและข้อจำกัดต่างๆ
2. นำข้อจำกัดต่างๆ มาเขียนกราฟ
3. หาพื้นที่ที่เป็นไปได้ (Feasible Area) ของปัญหา ซึ่งหมายถึงพื้นที่ร่วมที่แสดงด้วยกราฟของข้อจำกัดต่างๆ
4. ใช้วิธีการทดสอบ เพื่อหาค่าเฉลยที่ดีที่สุด โดยวิธีที่พี่สอน

ตัวอย่าง

จงหาค่ามากที่สุดของ $P = 2x + 5y$ ภายใต้เงื่อนไขดังนี้

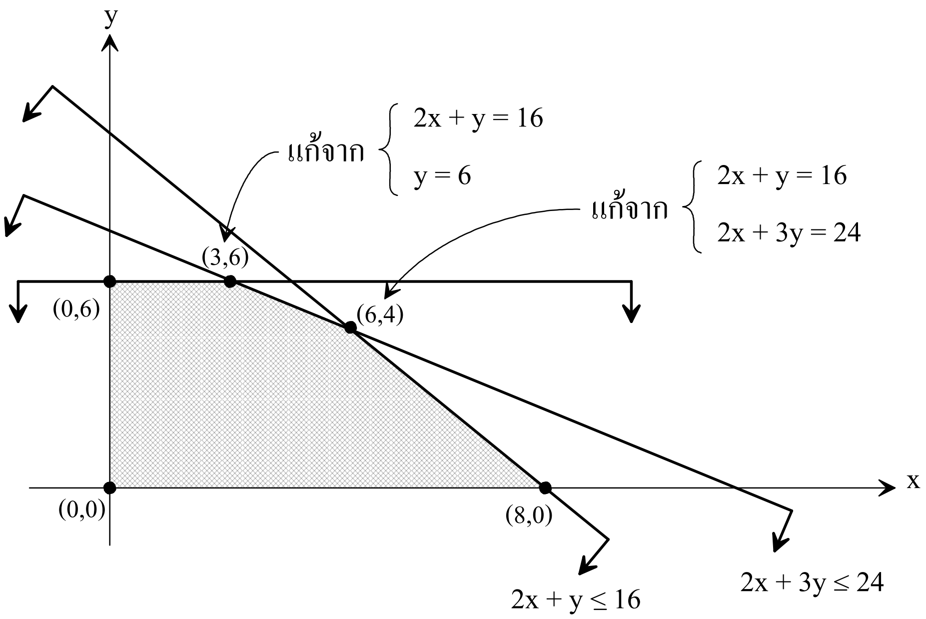
$$2x + y \le 16$$

$$2x + 3y \le 24$$

$$x \le 0$$

$$0 \le y \le 6$$

วิธีทำ



จุดมุมทั้งหมด คือ $(0, 0), (8, 0), (6, 4), (3, 6)$ และ $(0, 6)$

ทดสอบ $P = 2x + 5y$

$(0, 0)$ ได้ $P = 0$

$(8, 0)$ ได้ $P = 16$

$(6, 4)$ ได้ $P = 32$

$(3, 6)$ ได้ $P = 36$

$(0, 6)$ ได้ $P = 30$

$\therefore$ ค่าสูงสุดของ P คือ 36

เมตริกซ์

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} (\tan 30^\circ)^x & -1 \\ (\cot 60^\circ)^x & 2 \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = 9$

แล้ว A^{-1} คือ เมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จะเป็นเมตริกซ์ C ในข้อใดต่อไปนี้

ซึ่งทำให้ $(A + B) \cdot C = I$

1. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ 2. $-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ 3. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ 4. $-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่ง $2A-B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A+2B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ แล้ว $(AB)^{-1}$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4. กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ 2×2 และ $\det(A)=4$ ถ้า I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ และ $A-3I$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det(A+3I)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 6 3. 13 4. 26

5. กำหนดเมตริกซ์ A และ B ดังนี้

$A = \begin{bmatrix} x^2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & x \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & -4x \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\det(2A) = -76$ แล้ว เมตริกซ์ C ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ค่าของ $\det(BC)$ อยู่ภายในช่วง $(-100, -50)$

1. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ โดยที่ a เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + x + 1 = 0$

ดังนั้น $\det(2A^2A^tA^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 2 2. 8 3. 32 4. 72

7. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 โดยที่ $AB = A + B$ และ $\det(A - I) = 8$ จะได้ $\det(I - B^t)$ มีค่าเท่าใด

1. $-\frac{1}{4}$ 2. $-\frac{1}{8}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{8}$

8. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(4(A^{-1})) + \det(4(A^{-1})^2) + \det(4(A^{-1})^3) + \ldots.. + \det(4(A^{-1})^6)$ มีค่าเท่าไร

1. 8.25 2. 15.75 3. 24.25 4. 30.75

9. กำหนดให้ A, B, C เป็นเมตริกซ์จัตุรัส 3×3 และ $\det C=-2, \det(BC^{-1}\cdot B)=-4$ $\det(AC^{-1}+I)=2$ โดย $\det B>0$ จงหา $\det 2(AB+CB)$ มีค่าเท่าใด

1. $32\sqrt{2}$ 2. $-32\sqrt{2}$ 3. $64\sqrt{2}$ 4. $-64\sqrt{2}$

10. ถ้า $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det\left(-2A^3A^t(A+A^t)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 768 2. -768 3. 384 4. -384

11. กำหนดให้ A, B, C, I เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ และถ้า $\det(-A^3)=\det(2\sqrt{2}\,I), \det(C^{-1})=4$ และ $AB^tC=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ แล้ว det(B) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\det(4I)$ 2. $\det(16I)$ 3. $\det(A^3)$ 4. $\det(C^3)$

12. ให้ A, B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 ถ้า $\det A = 9$ และ $A^tB-2A^tC^t=-3A^{-1}$ แล้ว $\det(2C-B^t)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{3}$ 2. -1 3. 1 4. $\frac{1}{3}$

13. ถ้า x, y, z สอดคล้องกับระบบของสมการ

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= -2 \\ 2x+y+2z &= 5 \\ x-3y-2z &= 3 \end{aligned}$$

แล้วดีเทอร์มิแนนต์ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ x+2y & 2x+y & x-3y \end{vmatrix}$ มีค่าเท่าใด

14. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ $M_{32} + \left[\frac{M_{11}(A)-2M_{12}(A)}{C_{11}(A)+2C_{12}(A)}\right]^{C_{23}(A)}$

มีค่าเท่าใด

1. 2 2. 3 3. 4 4. 5

15. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $C_{11}(A) = 13$ และ $C_{21}(A) = 9$ แล้ว $\det A$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. -33 2. -30 3. 30 4. 33

16. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & a-2 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า $M_{11}(A) = 5$ แล้ว จงหาค่าของ $C_{32}(2A^t)$

1. 2 2. 4 3. 8 4. 16

17. ให้ A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3

ถ้า $M_{13}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $M_{21}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ และ $M_{32}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

แล้ว $\det A$ มีค่าเท่าใด

1. 15 2. 30 3. 45 4. 60

18. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x+2 & x & x+1 \\ 0 & x & x+1 \\ x+1 & -1 & x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(A) = 0$ แล้ว $\operatorname{adj} B$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

19. ให้ A, B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3

ถ้า $AB = BA = I$ และ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว เมตริกซ์ผูกพันของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}A$ 2. $-3A$ 3. $\frac{1}{3}A^t$ 4. $-3A^t$

20. กำหนด A, B และ C เป็นเมตริกซ์มิติ $3\times 3, B = A^t - A^{-1}, \det(\text{adj}A) = 9$

$3(C - B) = \text{adj}\,A$ ถ้า $\det A > 0$ ค่าของ $\det C$ คือเท่าใด

1. $\frac{1}{3}$ 2. 3 3. 9 4. 27

21. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ถ้า $A^2(\text{adj}(A))^2X = \begin{bmatrix} -36 \\ 54 \\ 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{2}$ 2. 2 3. -3 4. $-\frac{1}{3}$

22. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(2\text{adj}(\text{adj}A))$

1. 32 2. 64 3. 128 4. 256

23. กำหนดให้ $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1} เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{2}{3}$
2. -2
3. $\frac{2}{3}$
4. 2

24. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ แล้ว B^{-1} ตรงกับข้อใด

1. $\begin{bmatrix} \frac{11}{27} & \frac{-8}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{-5}{27} & \frac{11}{27} & \frac{-7}{27} \\ \frac{-7}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \frac{-5}{27} & \frac{11}{27} & \frac{-7}{27} \\ \frac{11}{27} & \frac{-8}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{-7}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \frac{-5}{27} & \frac{11}{27} & \frac{-7}{27} \\ \frac{-7}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{11}{27} & \frac{-8}{27} & \frac{10}{27} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} \frac{11}{27} & \frac{-8}{27} & \frac{10}{27} \\ \frac{-7}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{-5}{27} & \frac{11}{27} & \frac{-7}{27} \end{bmatrix}$

25. ให้ x, y, z เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 2$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 1$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

แล้ว ค่าของ $x + y + z$ เท่ากับเท่าใด

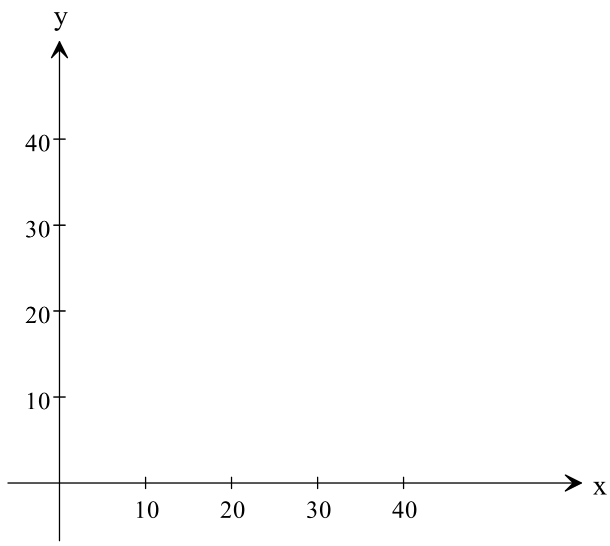
1. 2
2. 4
3. 6
4. 10

กำหนดการเชิงเส้น

26. ถ้า $P = 5x + 4y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $x + 2y \le 40, 3x + 2y \le 60, x \ge 0$ และ $y \ge 0$ แล้วค่าสูงสุดของ P เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 90 2. 100 3. 110 4. 115

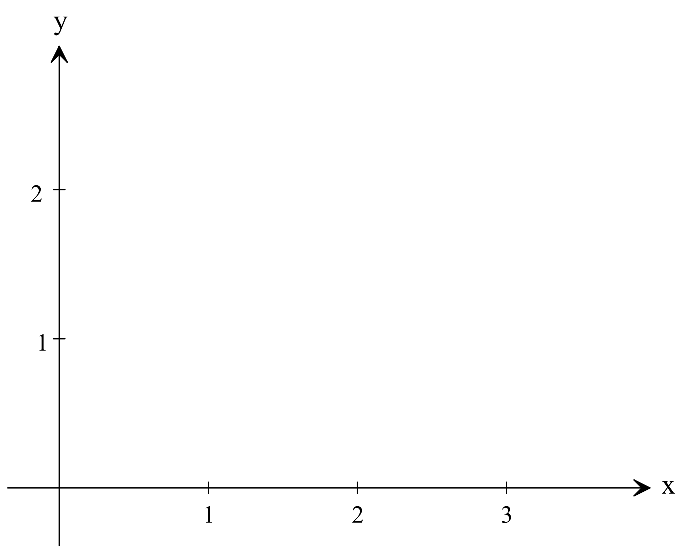
วิธีทำ



27. ถ้า C เป็นปริมาณที่มีค่าขึ้นกับค่าของตัวแปร x และ y ด้วยความสัมพันธ์ $C = 3x + 5y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $3x + 4y \ge 5, x + 3y \ge 3, x \ge 0$ และ $y \ge 0$ แล้วค่าต่ำสุดของ C ตามเงื่อนไขข้างต้น มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{21}{5}$ 2. $\frac{29}{5}$ 3. $\frac{25}{4}$ 4. $\frac{27}{4}$

วิธีทำ



28. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 7x + 5y$ และอสมการข้อจำกัดคือ

$$2x + y \geq 40$$
$$2x + 3y \leq 60$$
$$0 \leq x \leq 24$$
$$y \geq 0$$

ถ้า (a, b) เป็นจุดมุมที่ได้จากอสมการข้อจำกัด และให้ค่า P น้อยที่สุดแล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20　　2. 24　　3. 25　　4. 28

29. กำหนดสมการจุดประสงค์ $z = ax + by$ โดยที่ $a > 0, b > 0$
และมีอสมการข้อจำกัดคือ $x - 2y \leq 0, x + y \geq 3, 2x + y \geq 4, x \geq 0, y \geq 0$
เมื่อ $z = 0$ จะได้เส้นตรง $ax + by = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{3}{2}$
ถ้า z มีค่าน้อยที่สุดที่จุด (x_0, y_0) แล้ว ค่าของ $x_0 - y_0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4　　2. -1　　3. 1　　4. 3

30. สมการจุดประสงค์คือ $C = 3x + 2y + 4z$
จงหาค่า C ต่ำสุดเมื่อ
ข้อจำกัดคือ

$$x + 5y + 2z \geq 7$$
$$3x + y - 2z \geq 2$$
$$x + 2z = 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$