

เอกสารประกอบรายการโทรทัศน์ทบทวนความรู้ ม.ปลาย

รายการ : คณิตศาสตร์

เรื่อง : ตรรกศาสตร์

โดย อาจารย์กนกวลี. อุษณกรกุล

วิเคราะห์ข้อสอบ ENTRANCE

	ตุลาคม 2544	มีนาคม 2545	ตุลาคม 2545	มีนาคม 2546	ตุลาคม 2546
จำนวนข้อสอบ	2	2	2	3	2

3.1 ประพจน์และการเชื่อมประพจน์

1. **ประพจน์** คือข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

2. **ประพจน์เดี่ยว** คือประพจน์ที่ไม่มีตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์รวมอยู่ด้วย

3. **ประพจน์ผสม** คือประพจน์ที่ได้จากการนำประพจน์เดี่ยวตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไปมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์

4. การเชื่อมประพจน์

ตัวเชื่อมพื้นฐานของประพจน์ มี 4 ตัว ได้แก่ตัวเชื่อม “และ” ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $\wedge$ ”

“หรือ” ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $\vee$ ”

“ถ้า ... แล้ว” ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $\rightarrow$ ”

“ก็ต่อเมื่อ” ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $\leftrightarrow$ ”

ให้ p, q แทนประพจน์ใดๆ

T แทนกรณีที่ประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริง

F แทนกรณีที่ประพจน์มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตารางต่อไปนี้คือบทนิยามแสดงค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

การสร้างตารางค่าความจริง

ตารางแสดงค่าความจริงเป็นตารางที่แสดงค่าความจริงทุกกรณีที่เป็นไปได้ในการเชื่อมประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณาขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์ดังนี้

ถ้าประพจน์ผสมมีประพจน์เดี่ยว n ประพจน์ จำนวนกรณีที่พิจารณามี 2^n กรณี

นิเสธของประพจน์

ถ้า p เป็นประพจน์ใดๆ นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วย $\sim p$

หมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์เดิมดังตาราง

p	$\sim p$
T	F
F	T

3.2 สมมูล

ประพจน์ที่สมมูลกันคือประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี ประพจน์ที่สมมูลกันสามารถใช้แทนกันได้ ประพจน์ p และ q ที่สมมูลกันเขียนแทนด้วย $p \equiv q$

ประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
2. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
 $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
5. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q \equiv q \leftrightarrow p$
6. $\sim(\sim p) \equiv p$
7. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
8. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
9. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \leftrightarrow q$
10. $(p \wedge \sim p) \vee r \equiv r$
11. $(p \vee \sim p) \wedge r \equiv r$

3.3 สัจนิรันดร์ (Tautology)

สัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

การตรวจสอบว่าประพจน์เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ทำได้ 3 วิธีคือ

1. ใช้ตารางค่าความจริง
2. ใช้วิธีหาข้อขัดแย้ง โดยพิจารณาจากตัวเชื่อมดังนี้

(1) ประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \vee B$ สมมติให้ประพจน์ $A \vee B$ เป็นเท็จ

หาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในโจทย ถ้า A เป็นเท็จ และสามารถหาข้อขัดแย้งได้ว่า B ไม่มีโอกาสเป็นเท็จแล้ว $A \vee B$ จะเป็นสัจนิรันดร์

(2) ประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \rightarrow B$ สมมติให้ประพจน์ $A \rightarrow B$ เป็นเท็จ

หาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในโจทย ถ้า A เป็นจริง และสามารถหาข้อขัดแย้งได้ว่า B ไม่มีโอกาสเป็นเท็จแล้ว $A \rightarrow B$ จะเป็นสัจนิรันดร์

(3) ประพจน์ที่อยู่ในรูป $A \leftrightarrow B$ ให้ตรวจสอบโดย

1. ตรวจสอบว่าประพจน์ A และ B สมมูลกันหรือไม่ ทั้งนี้เพราะเมื่อเชื่อมประพจน์ที่สมมูลกันด้วย $\leftrightarrow$ ประพจน์ที่เกิดขึ้นจะเป็นสัจนิรันดร์

2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับการสมมูล ดังนี้

กำหนดให้ t เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

f เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

p เป็นประพจน์ใดๆ

$$(p \vee \sim p) \equiv t$$

$$p \vee t \equiv t$$

$$p \rightarrow t \equiv t$$

$$f \rightarrow p \equiv t$$

3.4 ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

- (1) **ประโยคเปิด** คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปรและไม่เป็นประพจน์ ตัวอย่างของประโยคเปิดเช่น

เราชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีคำว่า “เรา” เป็นตัวแปร

$x + 2 = 1$ มี “x” เป็นตัวแปร

สัญลักษณ์แทนประโยคเปิดใดๆ ที่มี เป็นตัวแปรเขียนแทนด้วย $P(x)$

- (2) ประโยคเปิดสามารถทำเป็นประพจน์ได้โดย

1. แทนค่าตัวแปร

2. เติมตัวบ่งปริมาณและกำหนดเอกภาพสัมพัทธ์

(3) ตัวบ่งปริมาณมี 2 ประเภทคือ

1. $\forall$... เป็นสัญลักษณ์ของตัวบ่งปริมาณแทนคำว่า

“สำหรับทุกค่าของ...”

“สำหรับแต่ละค่าของ...”

เช่น $\forall x$ มีความหมายว่า “สำหรับทุกค่าของ x ”

2. $\exists$... เป็นสัญลักษณ์ของตัวบ่งปริมาณ แทนคำว่า

“สำหรับบางค่าของ...”

“มี ... บางค่า”

เช่น $\exists x$ มีความหมายว่า “มีค่า x บางตัว”

ในกรณีที่ประโยคเปิดมีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว ต้องมีตัวบ่งปริมาณมากกว่า 1 ตัวใน

การขยายความจึงจะสามารถหาค่าความจริงของประโยคเปิดได้

เช่น $\forall x \forall y [P(x, y)]$ มีความหมายว่าสำหรับ x และ y ทุกตัวซึ่งสอดคล้องกับ

$[P(x, y)]$

(4) ค่าความจริงของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $a \in U$ ประพจน์ $P(a)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จก็ต่อเมื่อมี a บางตัวใน U ที่ทำให้ประพจน์ $P(a)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

บทนิยาม กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U

1. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อมี a บางตัวใน U ที่ทำให้ประพจน์ $P(a)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $a \in U$ ประพจน์ $P(a)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

3.5 สมมูลของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณจะสมมูลกันถ้าเดิมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้หน้าประพจน์ที่สมมูลกันซึ่งมีรูปแบบการสมมูลเช่นเดียวกันกับรูปแบบการสมมูลของประพจน์ เช่น

ให้ p, q แทน ประพจน์ใดๆ
 $P(x), Q(x)$ แทน ประโยคเปิด

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณ $\forall$

$$\text{จะได้ว่า } \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \forall x[\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$$

ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณ $\exists$

$$\text{จะได้ว่า } \exists x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \exists x[\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$$

3.6 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนที่สำคัญ 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ ได้แก่ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ และส่วนที่เป็นผลได้แก่ q

การอ้างเหตุผลเป็นการอ้างว่าประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ซึ่งเป็นเหตุ ส่งผลให้ประพจน์ q ซึ่งเป็นผลเป็นจริง (เรียกการอ้างเหตุผลแบบนี้ว่า **สมเหตุสมผล**) หรือส่งผลให้ประพจน์ q เป็นเท็จ (เรียกการอ้างเหตุผลแบบนี้ว่า **ไม่สมเหตุสมผล**)

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล ทำได้ 2 วิธีคือ

1. ตรวจสอบว่าประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์
2. พิจารณาจากรูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่นิยมใช้ ได้แก่

1. Modus Ponens

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & 1. p \rightarrow q \\ & 2. p \\ \hline \text{ผล} & q \end{array}$$

3. Law of Syllogism

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & 1. p \rightarrow q \\ & 2. q \rightarrow r \\ \hline \text{ผล} & p \rightarrow r \end{array}$$

5. Disjunctive Syllogism

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & 1. p \vee q \\ & 2. \sim q \\ \hline \text{ผล} & p \end{array}$$

7. Law of Simplification

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & p \wedge q \\ \hline \text{ผล} & p \end{array}$$

2. Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & 1. p \rightarrow q \\ & 2. \sim q \\ \hline \text{ผล} & \sim p \end{array}$$

4. Law of Contrapositive

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & p \rightarrow q \\ \hline \text{ผล} & \sim q \rightarrow \sim p \end{array}$$

6. เหตุ 1. $p \rightarrow r$

$$2. q \rightarrow s$$

$$3. p \vee q$$

$$\hline \text{ผล} \quad r \vee s$$

8. Law of Addition

$$\begin{array}{ll} \text{เหตุ} & p \\ \hline \text{ผล} & p \vee q \end{array}$$

ตัวอย่างข้อสอบ Entrance

เรื่องตรรกศาสตร์

1. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง เท็จ และ เท็จ ตามลำดับ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ที่มีค่าความจริงเหมือนกับประพจน์ $(p \rightarrow \sim q) \vee (r \wedge \sim p)$
(Ent. คณิต1 ตุลาคม 2541)
 - 1) $(\sim r \rightarrow p) \wedge (q \vee r)$ 2) $(q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
 - 3) $(\sim p \vee r) \rightarrow (q \wedge \sim r)$ 4) $(p \rightarrow q) \vee (\sim r \leftrightarrow q)$
2. ให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ ถ้า $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow s \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริงและ $\sim p \vee s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต1 มีนาคม 2545)
 - 1) $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง 2) $q \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง
 - 3) $r \rightarrow s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ 4) $s \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์ $p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $(p \vee q) \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
ก. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r$ ข. $p \leftrightarrow (q \vee \sim r)$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต1 มีนาคม 2544)
 1. ก จริง และ ข จริง 2. ก จริง และ ข เท็จ 3. ก เท็จ และ ข จริง 4. ก เท็จ และ ข เท็จ
4. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
ก. ถ้า $[(p \wedge \sim r) \wedge q] \rightarrow \sim (p \wedge q)$ เป็นเท็จแล้ว $(p \vee q) \rightarrow r$ เป็นจริง
ข. ถ้า $q \vee \sim r$ เป็นเท็จแล้ว $[p \vee (q \rightarrow r)] \sim q$ เป็นเท็จ
ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต1 มีนาคม 2546)
 1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด 3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด
5. นิเสธของประพจน์ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต2 ตุลาคม 2543)
 1. $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$ 2. $(p \vee \sim q) \vee \sim r$
 3. $(\sim p \vee q) \wedge \sim r$ 4. $(p \wedge \sim q) \vee \sim r$

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือเซต $U = (0, 1) \cup (2, \infty)$ แล้ว ประพจน์
- $$\forall x[(x - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \text{ หรือ } (x - 1)^2 > 1]$$
- มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข. ถ้า p, q, r เป็นประพจน์แล้ว $p \rightarrow (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
- ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง (Ent. คณิต1 มีนาคม 2545)
1. ก ถูก และ ข ถูก
 2. ก ถูก และ ข ผิด
 3. ก ผิด และ ข ถูก
 4. ก ผิด และ ข ผิด
7. ให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง
- ถ้า $P(x)$ แทนข้อความ $x^2 - 3x < 0$
- และ $Q(x)$ แทนข้อความ $-2 < \log_3 x < -1$
- แล้วประโยคในข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นจริง (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2546)
- 1) $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
 - 2) $\forall x[Q(x) \rightarrow P(x)]$
 - 3) $\forall x[\sim P(x) \rightarrow Q(x)]$
 - 4) $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$
8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง
- ก. $\exists x(\cot 2x - \cot x = 0)$
- ข. $\forall x(\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x)$
- ค่าความจริงของข้อความ ก. และข้อความ ข. เป็นไปตามข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2544)
- 1) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นจริง
 - 2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ
 - 3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง
 - 4) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นเท็จ
9. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด โดยที่ $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นจริง (Ent. คณิต1 ตุลาคม 2545)
1. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
 2. $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
 3. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$
 4. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
10. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดที่กำหนดให้ข้อความ $(\forall x[x^2 \leq 2x + 3]) \wedge (\exists y[y^2 - 4 > 0])$ มีค่าความจริงเป็นจริง (Ent. คณิต1 มีนาคม 2544)
1. $[-3, 0]$
 2. $[-1.5, 1.5]$
 3. $[-1, 2]$
 4. $[-0.5, 2.5]$

11. นิเสธของข้อความ $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้ (Ent. คณิต 1 มีนาคม 2543)

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$ | 2. $\exists x[\sim P(x) \rightarrow Q(x)]$ |
| 3. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ | 4. $\exists x[Q(x) \rightarrow P(x)]$ |

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p, q เป็นประพจน์โดยที่ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q \rightarrow (\sim p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์แล้ว q มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ $\exists x[(\sim P(x)) \wedge Q(x) \wedge (\sim R(x))]$ คือข้อความ

$\forall x[Q(x) \rightarrow (P(x) \vee R(x))]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต 1 ตุลาคม 2545)

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. ก. ถูก และ ข. ถูก | 2. ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3. ก. ผิด และ ข. ถูก | 4. ก. ผิด และ ข. ผิด |

13. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. เหตุ

ข. เหตุ

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $p \wedge q$ | 1. $P(x) \rightarrow \sim Q(x)$ |
| 2. $(q \vee r) \rightarrow (s \wedge p)$ | 2. $Q(x) \vee R(x)$ |
| 3. $p \rightarrow \sim r$ | ผล $P(x) \rightarrow R(x)$ |

ผล $s \wedge \sim r$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent. คณิต 1 ตุลาคม 2546)

- 1) ก. และ ข. สมเหตุสมผลทั้งคู่
- 2) ก. สมเหตุสมผล แต่ ข. ไม่สมเหตุสมผล
- 3) ก. ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข. สมเหตุสมผล
- 4) ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่

14. กำหนดให้ เหตุ 1. $\sim p \rightarrow \sim q$

2. $p \rightarrow (r \vee s)$

3. $q \vee t$

4. $\sim t$

ผลในข้อใดต่อไปนี้ทำให้การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล (Ent. คณิต 1 มีนาคม 2543)

- | | | | |
|----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. $s \rightarrow r$ | 2. $s \rightarrow \sim r$ | 3. $r \rightarrow \sim s$ | 4. $\sim r \rightarrow s$ |
|----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|

15. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์

ในการอ้างเหตุผล

ถ้า “เหตุ” คือ 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

2. $r \rightarrow \sim s$

แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็น “ผล” ที่ทำให้การอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผล

(Ent. คณิต 1 มีนาคม 2546)

1) p 2) q 3) $\sim p \wedge \sim q$ 4) $\sim p \wedge q$

เฉลย				
1) 3	2) 1	3) 2	4) 4	5) 3
6) 2	7) 4	8) 3	9) 4	10) 4
11) 3	12) 1	13) 1	14) 4	15) 3