เวกเตอร์

.1 ความหมายและการเขียนเวกเตอร์

ในการกล่าวถึงปริมาณใด ๆ เราจำแนกปริมาณออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) คือ ปริมาณที่ระบุเฉพาะ "ขนาด" เพียงอย่างเดียว เช่น ความกว้าง , าวามยาว , เวลา , อุณหภูมิ เป็นต้น

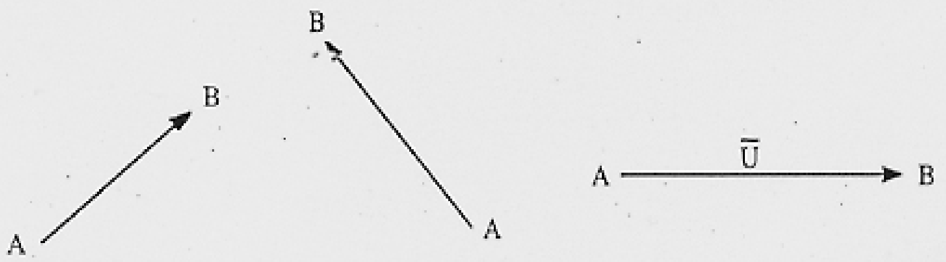
ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) คือ ปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะมีความหมาย ารบถ้วน เป็นที่เข้าใจกันได้ อาทิเช่น บ้านของนายจิรพงศ์อยู่ห่างจากวัดดอนไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร นอกจากนี้ปริมาณเวกเตอร์ที่มักพบในวิชาฟิสิกส์บ่อย ๆ ก็มี ความเร็ว , ความเร่ง , แรงและโมเมนตัม

1. **สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์**

ปริมาณเวกเตอร์ สามารถเขียนแทนได้ด้วย "ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง" โดย

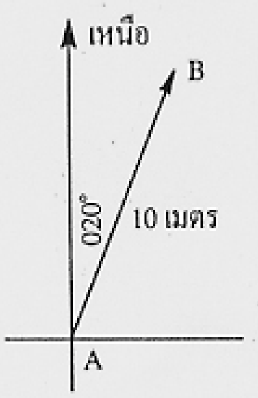
ความยาวของเส้นตรง แทน ขนาดของเวกเตอร์

ทิศทางของหัวลูกศร แทน ทิศทางของเวกเตอร์



สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์ เอบี ใช้แทน เวกเตอร์จาก A ไป B เรียก A ว่า จุดเริ่มต้น และเรียก B ว่า จุดสิ้นสุด อาจใช้ $\bar{U}$, $\bar{V}$ แทนเวกเตอร์ใด ๆ ก็ได้ และใช้ $|\overline{AB}|$ แทนขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ และ $|\bar{U}|$ แทนขนาดของ $\bar{U}$

2. **การเขียนเวกเตอร์ในระบบ 3 ตัว** (Three figure system) การเขียนแทนเวกเตอร์ในระบบ 3 ตัวนั้น ใช้การเขียนทิศทางโดยบอกขนาดของมุมที่วัดจากทิศเหนือเป็นหลัก และเป็นการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปเป็นมุมตั้งแต่ 0° ถึง 360° ถ้าขนาดของมุมน้อยกว่า 100° ต้องเขียน 0 นำหน้า



เช่น AB แทนเวกเตอร์ในทิศ 020°
เป็นระยะทาง 10 เมตร

2 การเท่ากันของเวกเตอร์

นิยาม $\bar{u}$ เท่ากับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน $\bar{u}$ เท่ากับ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} = \bar{v}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิยาม นิเสธของ $\bar{u}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ เขียนแทนนิเสธของ $\bar{u}$ ด้วย $-\bar{u}$

เวกเตอร์ศูนย์

นิยาม เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

3 การบวกเวกเตอร์

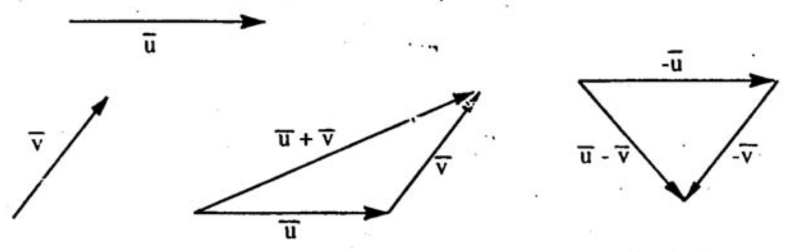
บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ เลือกจุด A ใด ๆ เป็นจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ หาจุด B ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และหาจุด C ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$ $\overrightarrow{AC}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นใหม่ก็คือผลบวกของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BC}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

นั่นคือ ถ้าให้ $\bar{w} = \overrightarrow{AC}$ จะได้ว่า

$$\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$$

ข้อสังเกต $\overline{u}, \overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ ตกลงเขียน $\overline{u} + (-\overline{v})$ ด้วย $\overline{u} - \overline{v}$



สมบัติการบวกของเวกเตอร์

ให้ $\overline{u}, \overline{v}$ และ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ การบวกของเวกเตอร์ในระนาบจะมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. **สมบัติปิด** กล่าวคือ ถ้าเรานำเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบมาบวกกัน ผลที่ได้ยังคงเป็นเวกเตอร์ในระนาบ ($\overline{u} + \overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ)
2. **สมบัติการสลับที่** $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
3. **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
4. **สมบัติการมีเอกลักษณ์** มี $\overline{0}$ ที่ทำให้ $\overline{u} + \overline{0} = \overline{u} = \overline{0} + \overline{u}$
5. **สมบัติการมีอินเวอร์ส** มี $-\overline{u}$ ที่ทำให้ $\overline{u} + (-\overline{u}) = (-\overline{u}) + \overline{u} = \overline{0}$
6. **สมบัติการบวกเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน** ถ้า $\overline{u} = \overline{v}$ แล้ว $\overline{u} + \overline{w} = \overline{v} + \overline{w}$

4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

นิยาม กำหนด $\overline{u}$ และ $m \in R$ นิยามเวกเตอร์ $m\overline{u}$ ดังนี้

1) ถ้า $m > 0$ แล้ว $m\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $m|\overline{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$
2) ถ้า $m < 0$ แล้ว $m\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|m||\overline{u}|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ u
3) ถ้า $m = 0$ แล้ว $m\overline{u} = \overline{0}$

สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ m , n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $m\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์
2. $1\bar{u} = \bar{u}$
3. $m(n\bar{u}) = (mn)\bar{u}$
4. $m(\bar{u} + \bar{v}) = m\bar{u} + m\bar{v}$
5. $(m + n)\bar{u} = m\bar{u} + n\bar{u}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

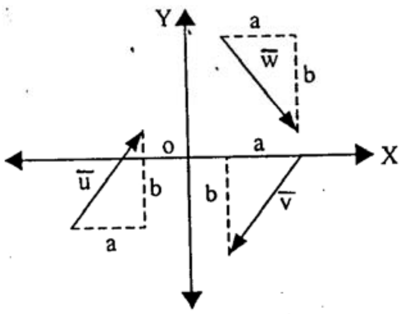
ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนด $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ บนระนาบ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $\overline{m}$ ซึ่ง $\bar{u} = m\bar{v}$

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนด $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}, \bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $m , n \in R$ ถ้า $m\bar{u} + n\bar{v} = \bar{0}$ แล้วจะได้ว่า $m = 0$ และ $n = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}, \bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะได้ว่า $\bar{w}$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $\bar{w} = m\bar{u} + n\bar{v}$ โดยที่ $m , n \in R$

5.เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

ความหมายและสัญลักษณ์ที่ใช้ในระบบแกนมุมฉาก

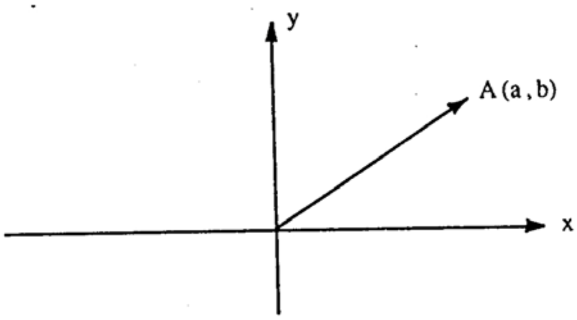


จากรูปเราเรียก $\overline{u}$ ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เพราะจากจุดเริ่มต้นไปทางขวา a หน่วย และขึ้นข้างบนอีก b หน่วย

เรียก $\overline{v}$ ว่า $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$ เพราะจากจุดเริ่มต้นไปทางซ้าย a หน่วย และลงข้างล่างอีก b หน่วย

เรียก $\overline{w}$ ว่า $\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$ เพราะจากจุดเริ่มต้นไปทางขวา a หน่วย และลงข้างล่างอีก b หน่วย

1. เวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน



เวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน คือ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด (0 , 0) จุดปลายอยู่ที่ A(a , b) ใด ๆ ดังรูป เราสามารถเขียน $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

2. การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

บทนิยาม กำหนด $\overline{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \overline{v} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก $\overline{u} = \overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ a = m และ b = n

3. นิเสธของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ นิเสธของ $\bar{u}$ คือ $-\bar{u} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

4. การบวกเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

บทนิยาม $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

ข้อตกลง $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$

$$\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$$

5. การคูณเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากด้วยสเกลาร์

บทนิยาม $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$k\bar{u} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$$

6. การขนานกันของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

บทนิยาม สำหรับ $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$\bar{u} \parallel \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

7. ขนาดของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

"ขนาดของเวกเตอร์ใด ๆ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทนเวกเตอร์นั้น"

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

และถ้า $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\therefore \ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

"เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย"

สรุป $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

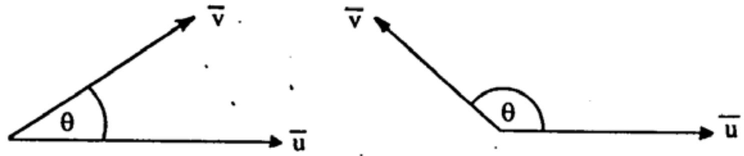
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

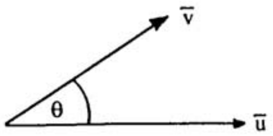
นั่นคือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\bar{u}$ คือ $\pm \frac{1}{|\bar{u}|} u$

6.ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

บทนิยาม กำหนด $\bar{u} \neq \bar{0}$; $\bar{v} \neq \bar{0}$ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ หมายถึง มุมบวกที่เล็กที่สุด ที่วัดจาก เวกเตอร์หนึ่งไปยังอีกเวกเตอร์หนึ่ง



บทนิยาม กำหนด $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ทำมุม θ ต่อกัน ดังรูป



กำหนด $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta$

และเรียก $\bar{u} \cdot \bar{v}$ ว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

บทนิยาม กำหนด $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = ac + bd$

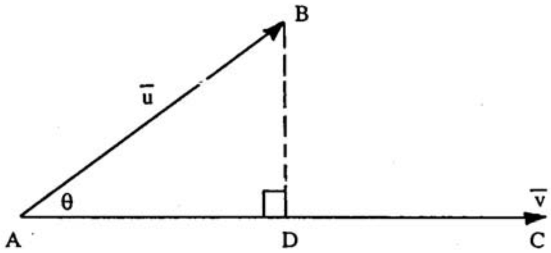
สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

กำหนด $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ k เป็นจำนวนจริง

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
2. $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{v}) + (\bar{u} \cdot \bar{w})$
3. $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$
4. $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$
5. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$
6. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ และมีทิศทางเดียวกัน $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|$
7. $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v}$
8. $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$

7. บทประยุกต์ของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. เวกเตอร์โปรเจกชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$



จากรูป $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$

$\overrightarrow{AC} = \bar{v}$

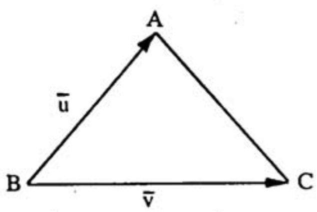
$BD \perp AC$ ที่ D

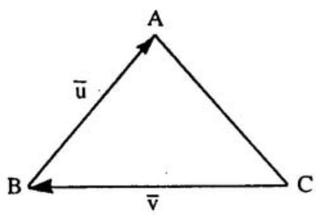
เรียก $\overrightarrow{AD}$ ว่า เวกเตอร์โปรเจกชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{|\bar{v}|^2} \cdot v$

2. พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีเวกเตอร์ u กับ v เป็นด้าน 2 ด้าน

กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยม ที่มี $\bar{u}, \bar{v}$ ประกอบเป็นด้าน 2 ด้าน ดังรูป





พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u} \cdot \bar{u})(\bar{v} \cdot \bar{v}) - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2}$

แบบฝึกประสบการณ์ เวกเตอร์

1. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี D เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB เป็นอัตราส่วน $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3:2$ และ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2537)

   1. $\frac{9}{5}$ 2. $\frac{11}{5}$ 3. $\frac{13}{5}$ 4. $\frac{14}{5}$

2. กำหนดให้ A , B และ C คือจุดที่มีพิกัดเป็น (-5 , 0) , (3 , 6) และ $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ตามลำดับ ถ้า D(a , b) เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ และขนาดของ $\overrightarrow{CD}$ เท่ากับ 2 แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2538)

   1. 3 2. 6 3. $\frac{29}{5}$ 4. $\frac{71}{5}$

3. กำหนด A(1 , -1) , B(5 , -4) และ P(2 , 3) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า Q เป็นจุดในระนาบ XY ที่ $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{AB}$ แล้ว $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2540)

   1. -9 2. -1 3. 9 4. 1

4. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่จุด D แล้ว $\overrightarrow{OD}$ คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2542)

   1. $\frac{7}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$ 2. $\frac{7}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$

   3. $\frac{8}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$ 4. $\frac{8}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$

5. ให้ A , B , C เป็นจุดในระนาบ และ O เป็นจุดกำเนิด โดยที่ $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{OB} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ ถ้า $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ แล้ว $|\overrightarrow{OC}|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2544)

   1. $\frac{113}{9}$ 2. $\frac{98}{9}$ 3. $\frac{193}{9}$ 4. $\frac{153}{9}$

6. เวกเตอร์ใดต่อไปนี้ขนานกับเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ที่จุด (6 , 0) (Ent คณิต กข 2536)

   1. $3\bar{i} + 4\bar{j}$ 2. $3\bar{i} - 4\bar{j}$ 3. $5\bar{i} - 3\bar{j}$ 4. $5\bar{i} + 3\bar{j}$

7. กำหนดจุด A(1 , 1) , B(4 , 10) , C(7 , 9) และ D เป็นจุดที่อยู่บนด้าน AB โดยที่ $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}$ ถ้า θ คือมุมระหว่าง $\overrightarrow{CA}$ และ $\overrightarrow{DC}$ แล้ว cosθ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2544)

   1. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{-2}{\sqrt{10}}$ 3. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{10}}$

8. กำหนดให้ A และ B คือจุด (-10 , 0) และ (2 , 4) ตามลำดับ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่จุด C ด้วยอัตราส่วน $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{1}{3}$ ถ้า O คือจุดกำเนิด แล้วโคไซน์ ของมุม COBθ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2541)

   1. $\frac{-2}{\sqrt{10}}$ 2. $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{10}}$

9. ให้ $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $(\bar{u} + \bar{v})$ และ $(\bar{u} - \bar{v})$ แล้ว cosθ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/1 2543)

   1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$

10. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 60° และ $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{37}$, $|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{13}$ แล้ว $|\bar{u}|+|\bar{v}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2542)

1. 5
2. 7
3. $\sqrt{37}$
4. $\sqrt{50}$

11. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ถ้า $\bar{u}+\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}-2\bar{v}$ และ

$\bar{u}+2\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $2\bar{u}-\bar{v}$ และ $|\bar{u}| = \sqrt{2}$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(Ent คณิต 1/2 2543)

1. $\frac{-1}{\sqrt{10}}$
2. $\frac{-1}{\sqrt{6}}$
3. $\frac{-1}{\sqrt{4}}$
4. $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

12. กำหนดให้ $|\bar{U}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\bar{U}+\bar{V}| = 5$, $|\bar{U}-\bar{V}| = 4$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{U}$ และ $\bar{V}$ แล้ว θ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (Ent คณิต 1/2 2544)

1. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$
3. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$
4. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

13. กำหนดให้ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u}-\bar{v}| = |\bar{v}+\bar{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่กับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2537)

1. 0
2. $\frac{2\pi}{5}$
3. $\frac{4\pi}{5}$
4. π

14. ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v} = 5$, $|\bar{u}| = 2$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา แล้ว $|\bar{u}+\bar{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent คณิต กข 2539)

1. 7
2. 12
3. $\sqrt{29}$
4. $\sqrt{39}$

15. กำหนดให้ $|\bar{u}-\bar{v}| = 3$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = -2$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ข. $|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2 = 3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent คณิต 1/1 2543)

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข.. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลยแบบฝึกประสบการณ์ เวกเตอร์

1. 3
2. 1
3. 3
4. 2
5. 1
6. 2
7. 1
8. 2
9. 1
10. 2
11. 1
12. 2
13. 3
14. 4
15. 2