



คณิตศาสตร์

อ.ชัยรัตน์ เจษฏารัตติกร
(อ.เจี๋ย)

คณิตศาสตร์เป็นเรื่องกล้วยๆ

การหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนเป็นเรื่องกล้วยๆ

การหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนเป็นเรื่องที่ข้อสอบชอบออกมาก และยังเป็นพื้นฐานของการหาค่าฟังก์ชันขั้นสูงต่อไป ดังนั้นเราจึงควรฝึกทำโจทย์กลุ่มนี้ให้คล่องซึ่งในที่นี้จะแนะนำวิธีการหาถึง 3 วิธี ส่วนการเลือกใช้ก็อยู่ที่เราจะชอบเลือกวิธีไหน (A.JIA ชอบวิธีที่ 3 เพราะมันทำให้เราหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนในใจได้)

วิธี	หลัก
1. วิธีเทียบสัมประสิทธิ์โดยตรง	1. จัดกลุ่มตัวแปรของทั้งสองข้างของสมการให้เหมือนกัน 2. แทนกลุ่มตัวแปรทั้งสองข้างที่เหมือนกันด้วย x จะเจอ $f(x)$ 3. ถ้าคำถามไม่ใช่แค่ $f(x)$ ให้แทน x ด้วยสิ่งที่ต้องการ
2. สูตรลดการหาค่าฟังก์ชันทั่วไป	1. สมมติให้กลุ่มตัวแปรฝั่งซ้ายเท่ากับ A และหาค่า x ในรูปของ A 2. แทนค่าของ x ในรูปของ A ในฝั่งขวาของสมการจะเจอ $f(A)$ 3. เมื่อเปลี่ยน A เป็น x คืนจะเจอ $f(x)$
3. สูตรการหาค่าฟังก์ชันของ JIA	

Ex.1 กำหนดให้ $f(x+1) = 2x - 1$ จงหา $f(x)$

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรลดทั่วไป

วิธีที่ 3 สูตรของ JIA

$$f(x+1) = 2x - 1$$

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ex.2 กำหนดให้ $f(x-1) = 3x + 4$ จงหา $f^{-1}(x+1)$

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรลดทั่วไป

วิธีที่ 3 สูตรของ JIA

$$f(x-1) = 3x + 4$$

$$f^{-1}(x+1) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ex.3 กำหนดให้ $f(2x - 3) = 5x + 7$ จงหาค่าของ $f^{-1}(-3)$

1. 8 2. -8 3. 7 4. -7

Ex.4 กำหนดให้ $f\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}x - 1$ จงหาว่า $f^{-1}(2)$ ตรงกับข้อใด

1. 0 2. 2 3. 4 4. 6

Ex.5 กำหนดให้ $f(6x + 4) = 3x - 1$ จงหา $f^{-1}(x + 1)$

1. $2x + 4$ 2. $2x + 8$ 3. $2x - 4$ 4. $2x - 8$

Tip... การใช้สูตรลัดของ JIA ในการหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนจะสามารถใช้ได้กับโจทย์ทุกข้อ แต่เมื่อทำ
โจทย์เป็นจำนวนมากก็ควรรู้เพิ่มว่า

1. โจทย์ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนมากควรจะลดทอนตัวแปรโดยการทำให้เป็น..... ก่อนแล้วค่อยใช้
สูตรลัด
2. โจทย์ที่มีตัวแปรกำลังหนึ่งหารกันและให้หา $f^{-1}(x)$ ควรจะใช้สูตรลัดเฉพาะ.....
..... จะเร็วกว่า (เร็วที่สุด)

โจทย์ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนมาก

Ex.6 ถ้า $f(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ ค่าของ $f^{-1}(-6)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -1 3. 1 4. ไม่มีข้อถูก

Ex.7 ถ้า $f(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ และ $g(x - 2) = 2x - 3$ แล้ว $f^{-1}(-4) - g^{-1}(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ต่อไปนี้

1. -3 2. -1 3. 1 4. 3

โจทย์ที่มีตัวแปรกำลังหนึ่งหารกัน

Ex.8 กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x - 4}{5x + 3}$ ข้อใดคือ $f^{-1}(x)$

- | | |
|---|---|
| 1. $f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{-5x + 2}$ | 2. $f^{-1}(x) = \frac{3x + 4}{-5x + 2}$ |
| 3. $f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{5x + 2}$ | 4. $f^{-1}(x) = \frac{3x + 4}{5x + 2}$ |

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรของ JIA

Ex.9 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ เมื่อ $x \neq -3$ ข้อใดคือ $f^{-1}(3)$

1. $-\frac{9}{2}$

2. $\frac{9}{2}$

3. $-\frac{11}{2}$

4. $\frac{11}{2}$

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรของ JIA

การหาค่าฟังก์ชันประกอบ

โจทย์จะกำหนดฟังก์ชันย่อยมาให้ และให้หาค่าฟังก์ชันประกอบที่จุดใดจุดหนึ่ง การทำโจทย์กลุ่มนี้จะทำได้ 2 วิธี คือ

1. หาฟังก์ชันประกอบให้เสร็จก่อนแล้วค่อยแทนค่า x เพื่อหาค่าฟังก์ชันประกอบอีกที
2. หาค่าฟังก์ชันย่อยทันทีโดยแทนจากชั้นในสุดก่อน และค่อยๆ หาจนเจอค่าฟังก์ชันประกอบที่ต้องการ (วิธีนี้สามารถใช้สูตรการหาค่าฟังก์ชันเข้าช่วยคิด)

ข้อแนะนำ วิธีที่ 2 จะเป็นวิธีที่รวดเร็วกว่าเหมาะจะใช้นำไปทำข้อสอบจริง

Ex.10 กำหนดให้ $f(2x + 1) = 3x + 2$ และ $g(3x - 2) = 5x + 1$ จงหาค่าของ $(g \circ f)(5)$

วิธีที่ 1

วิธีที่ 2 ใช้สูตรการหาค่าฟังก์ชันของ JIA

Ex.11 กำหนดให้ $f(3x + 1) = 5x + 2$ และ $g(5x + 3) = 4x + 1$ จงหาค่าของ $(g \circ f^{-1})(12)$

วิธีที่ 1

วิธีที่ 2 ใช้สูตรการหาค่าฟังก์ชันของ JIA

Ex.12 กำหนดให้ $f(3x + 1) = 5x + 2$ และ $g(5x - 3) = 4x + 1$ จงหาค่าของ $(g \circ f)(7)$

1. 10

2. 11

3. 12

4. 13

Ex.13 กำหนดให้ $f(2x + 1) = 3x + 2$ และ $g(3x - 2) = 5x + 1$ จงหาค่าของ $(f \circ g^{-1})(16)$

1. 10

2. 11

3. 12

4. 13

Ex.14 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 2$ และ $g(x) = 2x + 7$ จงหาค่าของ $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ (เตรียมฯ)

1. $-\frac{7}{2}$

2. $-\frac{17}{6}$

3. $-\frac{1}{6}$

4. $\frac{17}{6}$

Ex.15 ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $(f \circ g)(x+2) = 3x+6$ แล้ว $g(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{6}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. $\frac{12}{5}$ 4. $\frac{24}{11}$

การหาจำนวนเชิงซ้อนเป็นเรื่องกล้วยๆ

บทนิยาม

กำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$ และ i ถูกเรียกว่าหนึ่งหน่วยจินตภาพ (Unit of imaginary)

การหาค่าของ i^n

ทดลองหาค่า i^n เพื่อหาผลสรุป				การหาค่าของ i^n แบบทั่วไป
กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3	กลุ่มที่ 4	ให้อ่านเลขชี้กำลัง n หาค่าด้วยถ้า เหลือเศษ 1 แล้วค่าของ $i^n = \dots\dots\dots$ เหลือเศษ 2 แล้วค่าของ $i^n = \dots\dots\dots$ เหลือเศษ 3 แล้วค่าของ $i^n = \dots\dots\dots$ ลงตัวพอดี แล้วค่าของ $i^n = \dots\dots\dots$
$i^1 = \dots\dots\dots$	$i^2 = \dots\dots\dots$	$i^3 = \dots\dots\dots$	$i^4 = \dots\dots\dots$	
$i^5 = \dots\dots\dots$	$i^6 = \dots\dots\dots$	$i^7 = \dots\dots\dots$	$i^8 = \dots\dots\dots$	
$i^9 = \dots\dots\dots$	$i^{10} = \dots\dots\dots$	$i^{11} = \dots\dots\dots$	$i^{12} = \dots\dots\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Tip... จากกฎการหารลงตัวเรานำ $4|n$ มาใช้ได้กับการหาค่าของ i^n ได้อย่างรวดเร็ว คือ
 ให้นำ.....ของ n มาหารด้วย 4 ก็พอ

Ex.1 จงหาค่าของ i^n ต่อไป

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $i^{12} = \dots\dots\dots$ | 6. $i^{102} = \dots\dots\dots$ |
| 2. $i^{27} = \dots\dots\dots$ | 7. $i^{200} = \dots\dots\dots$ |
| 3. $i^{33} = \dots\dots\dots$ | 8. $i^{325} = \dots\dots\dots$ |
| 4. $i^{70} = \dots\dots\dots$ | 9. $i^{1250} = \dots\dots\dots$ |
| 5. $i^{56} = \dots\dots\dots$ | 10. $i^{2,000} = \dots\dots\dots$ |

Ex.2 จงหาค่าของ i^n ต่อไปอย่างรวดเร็วยิ่งที่สุด

- | | |
|--|--|
| 1. $i^{5,417} = \dots\dots\dots$ | 2. $i^{2,365,413} = \dots\dots\dots$ |
| 3. $i^{236,598,720} = \dots\dots\dots$ | 4. $i^{1,526,598,841} = \dots\dots\dots$ |

Ex.3 ค่าของ $\frac{i^{541} + i^{720} + i^{983} + i^{1000}}{i^{481} + i^{523} + i^{624} + i^{780}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1

2. -1

3. i

4. -i

เทคนิคการยกกำลัง $(a + bi)^n$

การหาค่า $(a + bi)^n$ ถ้าเราใช้วิธีคิดแบบ $(a + bi)^n = \underbrace{(a + bi) \cdot (a + bi) \cdot (a + bi) \cdot \dots \cdot (a + bi)}_n$

ซึ่งเป็นวิธีพื้นฐานจริงๆนั้นไม่เหมาะสมกับการทำการทำข้อสอบแน่ เราจึงควรรู้จักเทคนิคต่างๆดังนี้

	เทคนิคทั่วไป	The Best Sol ⁿ
เมื่อ $a = \pm b$	$(a + bi)^n =$	
เมื่อ $a \neq \pm b$	$(a + bi)^n =$	

ตัวอย่างโจทย์ที่ $a = \pm b$

Ex.4 จงหาค่าของ $(1 + i)^{10}$

เทคนิคทั่วไป	The Best Sol ⁿ
$(1 + i)^{10} = \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$	$(1 + i)^{10} = \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$

Ex.5 จงหาค่าของ $(a + bi)^n$ ให้เร็วที่สุด

- $(1 - i)^{10} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
- $(1 - i)^{20} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

- $(2 - 2i)^6 = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
- $(1 + i)^{15} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

Ex.6 ค่าของ $(-1 + i)^{10}$ คือข้อใด

1. 32

2. -32

3. 32i

4. -32i

Ex.7 ค่าของ $(1 - i)^{10} + (2 + 2i)^5$ $(1 - i)^{10} + (2 + 2i)^5$ คือข้อใด

1. $128 - 160i$

2. $-128 - 160i$

3. $160 - 128i$

4. $-160 - 128i$

Ex.8 $(1+i)^{-6} \times \frac{(1-i)^6}{(1+i)^{10}}$ เท่ากับ

1. $\frac{1}{64} + \frac{1}{64}i$

2. $\frac{1}{32}i$

3. $\frac{1}{8}i$

4. $\frac{1}{4}$

ตัวอย่างโจทย์ที่ $a \neq \pm b$

Ex.9 จงหาค่าของ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)^3$ และสรุปผลเพื่อนำไปประยุกต์ใช้

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1. $(1 + \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2. $(1 - \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3. $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4. $(-1 - \sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

Tip... สรุปค่าของ $(\pm\sqrt{3}\pm i)^3$ หรือ $(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)^3$ มักจะถูกนำมาออกเป็นข้อสอบ

เราสามารถหาค่าได้อย่างรวดเร็วโดยใช้หลัก “..... เท่า ไม่เอา”

Ex.10 จงหาค่าของ $(\pm\sqrt{3}\pm i)^3$ หรือ $(\pm 1\pm\sqrt{3}i)^3$ ให้เร็วที่สุด

1. $(1+\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$
2. $(1-\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$
3. $(-1+\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$
4. $(-1-\sqrt{3}i)^3 = \dots\dots\dots$
5. $(\sqrt{3}+i)^3 = \dots\dots\dots$
6. $(\sqrt{3}-i)^3 = \dots\dots\dots$
7. $(-\sqrt{3}+i)^3 = \dots\dots\dots$
8. $(-\sqrt{3}-i)^3 = \dots\dots\dots$

Ex.11 จงหาค่าของ $(1+\sqrt{3}i)^9$ ตรงกับข้อใด

1. 512
2. -512
3. 512i
4. -512i

Ex.12 ถ้า $A = (\sqrt{3}+i)^3 + (\sqrt{3}+i)^6$ และ $B = (1+\sqrt{3}i)^3 + (1+\sqrt{3}i)^6$

จงหาค่าของ $A+B$ เท่ากับข้อใด

1. $-8-8i$
2. $-8+8i$
3. $8-8i$
4. $8+8i$

Ex.13 ให้ $Z = -1-\sqrt{3}i$ แล้ว $Z^6 + Z^{-6}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2^{12}+1}{2^6}$
2. $\frac{2^{12}-1}{2^6}$
3. $\frac{2^6+1}{2^{12}}$
4. $\frac{2^6+1}{2^{12}}$

Tip... สรุปค่าของ $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i)^3$ หรือ $(\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ก็มักจะถูกนำมาออกเป็นข้อสอบ
เราสามารถหาค่าได้อย่างรวดเร็วโดยใช้หลักเดิมๆ คือ “..... เท่า ไม่เอา”

Ex.14 จงหาค่าของ $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i)^3$ หรือ $(\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ให้เร็วที่สุด

1. $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
2. $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
3. $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
4. $(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
5. $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
6. $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
7. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$
8. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^3 = \dots\dots\dots$

Ex.15 ค่าของ $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ ตรงกับข้อใด

1. 1
2. -1
3. i
4. -i

Ex.16 ค่าของ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$ ตรงกับข้อใด

1. 1 2. -1 3. i 4. -i

Ex.17 ค่าของ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{99}$ ตรงกับข้อใด

1. 1 2. -1 3. i 4. -i

Ex.18 กำหนดให้ $Z = \frac{i - \sqrt{3}}{2}$ จงหาค่าของ Z^{60}

1. 1 2. -1 3. i 4. -i

Ex.19 กำหนดให้ $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ค่าของ $X^{999} + Y^{1,000}$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 4. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ex.20 ถ้า $2Z^3 = 1 + \sqrt{3}i$ และ $\frac{Z^{18}}{-Z^{27}} = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงแล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

Ex.21 ให้ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{100}$ และ $B = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$ จงหาค่าของ $\frac{A}{B}$ (เตรียมฯ)

1. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 4. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ex.22 ค่าของ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8 (-2 + 2i)^4$ เท่ากับข้อใด

1. $32 - 32\sqrt{3}i$ 2. $32 + 32\sqrt{3}i$ 3. $64 - 64\sqrt{3}i$ 4. $64 + 64\sqrt{3}i$

Ex.23 ค่าของ $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 (1 - i)^3}{(-1 + i)^4}$ ตรงกับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $32 + 32i$ 2. $32 - 32i$ 3. $-32 + 32i$ 4. $-32 - 32i$

Ex.24 ค่าของ $\frac{(\sqrt{3} + i)^{723} (1 - i)^{358}}{2^{900}}$ ตรงกับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. 4 3. -2 4. 2