ระบบจำนวนจริง

By พี่เอ๋ (วิเศษ กี่สุขพันธ์)
วศ.บ., วศ.ม.จุฬาฯ
สถาบันกวดวิชาเดอะเบรน

เทคนิคการแก้อสมการตัวแปรเดียว (ดีกรี 2 ขึ้นไป)

<u>ขั้นที่ 1</u> จัดอสมการให้อยู่ในรูป

หรือ $>$ หรือ $\leq$ หรือ $<$

$$(Ax+a)(Bx+b)(Cx+c)\,\ldots.. \quad \geq \quad 0$$

<u>ซ้ายมือ</u> เป็นวงเล็บของ x ดีกรี 1 คูณกัน
โดย**สัมประสิทธิ์หน้า x ต้องเป็นบวก** $(A, B, C, \ldots.. > 0)$

<u>ขวามือ</u> ต้องเป็น 0

<u>หมายเหตุ</u> หากสัมประสิทธิ์หน้า x ติดลบ ให้คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วย -1 และกลับเครื่องหมายอสมการเป็นตรงข้ามด้วย (ถ้ามีมากกว่า 1 วงเล็บ คู่วงเล็บเครื่องหมายสุดท้ายจะเหมือนเดิม คี่วงเล็บเครื่องหมายสุดท้ายจะเปลี่ยนเป็นตรงข้าม)

<u>ขั้นที่ 2</u> จับแต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 จะได้ค่า x ออกมา แล้วนำค่า x นั้นไปลงบนเส้นจำนวน จะพบว่า เส้นจำนวนถูกแบ่งเป็นช่วงสั้นๆ

<u>ขั้นที่ 3</u> ให้**ขวามือสุดเป็นบวก** จากนั้นใส่ - , + สลับกันไปเรื่อยๆ

<u>ขั้นที่ 4</u> ถ้าอสมการในขั้นที่ 1 เป็น ≥ 0 หรือ > 0 ให้ตอบช่วงที่เป็นบวก แต่ถ้าเป็น ≤ 0 หรือ < 0 ให้ตอบช่วงที่เป็นลบ และสำหรับ ≥ 0, ≤ 0 (มีเครื่องหมาย $=$ ร่วมด้วย) ให้ระบายจุด x จากขั้นที่ 2 (จุดปลายของช่วง) เป็นคำตอบด้วย

เพิ่มเติม

1. **กรณีวงเล็บทางซ้ายมือมีดีกรีมากกว่า 1**

อาจทำได้ 2 วิธี

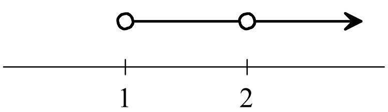
<u>วิธีที่ 1</u> วงเล็บดีกรีคู่ตัดทิ้งและ

a) ถ้าอสมการเป็น > 0 หรือ < 0
ให้สร้างเงื่อนไขด้วยว่า วงเล็บนั้นเป็น 0 ไม่ได้

เช่น $(x-1)(x-2)^4 > 0$

$(x-1) > 0$ และ $(x-2) \neq 0$

$x > 1$ และ $x \neq 2$



$\Rightarrow \quad x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$

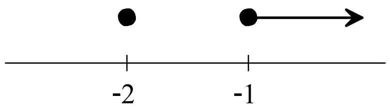
b) ถ้าอสมการเป็น ≥ 0 หรือ ≤ 0

ให้สร้างเงื่อนไขด้วยว่า วงเล็บนั้นเป็น 0 ได้ด้วย

เช่น $(x+1)(x+2)^4 \geq 0$

$(x+1) \geq 0$ หรือ $(x+2) = 0$

$x \geq -1$ หรือ $x = -2$



$\Rightarrow \quad x \in \{-2\} \cup [-1, \infty)$

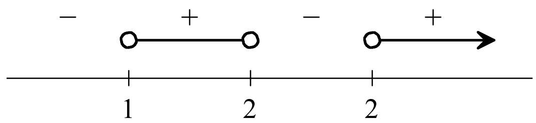
สำหรับวงเล็บดีกรีคี่ ให้เปลี่ยนเป็นดีกรี 1

(เนื่องจากวงเล็บดีกรีคี่ กับ วงเล็บดีกรี 1 ให้ผลลัพธ์บนเส้นจำนวนเหมือนกัน)

<u>วิธีที่ 2</u> วงเล็บดีกรีคู่ให้ใส่ค่า x บนเส้นจำนวน 2 จุด

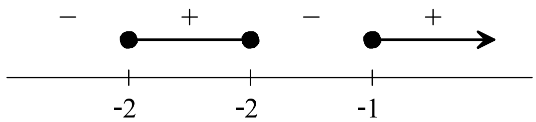
วงเล็บดีกรีคี่ให้ใส่ค่า x บนเส้นจำนวน 1 จุด

เช่น $(x-1)^3(x-2)^4 > 0$



$\Rightarrow x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$

เช่น $(x+1)^5(x+2)^6 \geq 0$



$\Rightarrow x \in \{-2\} \cup [-1, \infty)$

2. กรณีด้านซ้ายของอสมการเป็นเศษส่วน

ให้จัดอยู่ในรูป

$\boxed{\text{หรือ } > \text{ หรือ } \leq \text{ หรือ } <}$

$$\frac{(Ax+a)(Bx+b)\ldots\ldots}{(Cx+c)(Dx+d)\ldots\ldots} \geq 0$$

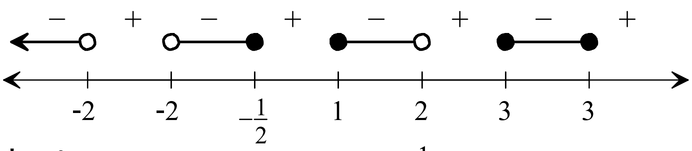
อ้าง**ส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์** $Cx+c \neq 0$, $Dx+d \neq 0$, ... $\Rightarrow x \neq -\frac{c}{C}, -\frac{d}{D}, \ldots\ldots$

จากนั้นจับแต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 ทั้งเศษและ ส่วนจะได้ค่า x ออกมาแล้วนำค่า x นั้นไปลงบนเส้นจำนวน ขั้นตอนที่เหลือทำเหมือนขั้นที่ 3 และขั้นที่ 4 เดิม แต่ต้องนำ x ที่ทำให้ส่วนเป็นศูนย์ออกจากช่วงคำตอบ

เช่น $\frac{(2x+1)^3(x-1)^5(x-3)^2}{(2-x)(x+2)^4} \geq 0$, $x \neq 2, -2$

$$\frac{(2x+1)^3(x-1)^5(x-3)^2}{(-1)(2-x)(x+2)^4} \leq \frac{0}{(-1)}$$

$$\frac{(2x+1)^3(x-1)^5(x-3)^2}{(x-2)(x+2)^4} \leq 0$$



ช่วงคำตอบ $= (-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2}] \cup [1, 2) \cup \{3\}$

3. กรณีวงเล็บทางซ้ายมือมีค่าเป็นบวกได้อย่างเดียว ซึ่งมักอยู่ในรูป $[P(x)]^2$ + เลขบวก , $|Q(x)|$ + เลขบวก, ax^2+bx+c ซึ่งแยกตัวประกอบไม่ออก เช่น $(x+2)^2+1$, $|3x-1|+5$, x^2+2x+5 เป็นต้น วงเล็บเหล่านี้ตัดทิ้งได้ (เหมือนกับว่านำวงเล็บเหล่านั้นคูณหรือหารออกทั้ง 2 ข้างนั้นเอง)

<u>**หมายเหตุ**</u> สำหรับกรณี ax^2+bx+c ที่จะมีค่าเป็นบวกได้อย่างเดียว ให้สังเกตว่า $a > 0$ และ $b^2-4ac < 0$

เทคนิคการแก้อสมการที่ติดค่าสัมบูรณ์

รูปแบบทั่วไปที่พบบ่อย

หรือ $\geq$

รูปแบบที่ 1 $|P(x)| > Q(x)$

จะได้ $P(x) > Q(x)$ หรือ $P(x) < -Q(x)$

หรือ $\leq$

รูปแบบที่ 2 $|P(x)| < Q(x)$

จะได้ $-Q(x) < P(x) < Q(x)$

หรือ $\geq$ หรือ $<$ หรือ $\leq$

รูปแบบที่ 3 $|P(x)| > |Q(x)|$

$$[P(x) - Q(x)] \cdot [P(x) + Q(x)] > 0$$

สำหรับอสมการที่นอกเหนือจาก 3 รูปแบบด้านบนนี้ จะนิยมใช้การแบ่งกรณี

หมายเหตุ

1. สำหรับอสมการบางข้อสามารถใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ช่วยให้ง่ายขึ้นได้โดย

สมบัติที่สำคัญมีดังนี้

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a-b| = |b-a|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
6. $|a|^2 = a^2$
7. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$
8. $|a| + |b| \geq |a+b|$
9. $|a| + |b| \geq |a-b|$
10. $|a| - |b| \leq |a+b|$
11. $|a| - |b| \leq |a-b|$
12. $|a| + |b| = |a+b| \leftrightarrow ab \geq 0$
13. $|a| + |b| = |a-b| \leftrightarrow ab \leq 0$

2. การยกกำลัง 2 เพื่อแก้อสมการ ต้องระวังหาก 2 ข้างของอสมการไม่ได้ประกันว่า ≥ 0 มักจะทำให้มีคำตอบผิดปนมาเสมอ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder theorem)

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x-c$ แล้ว เศษจากการหารจะเท่ากับ $P(c)$

ตัวอย่าง จงหาเศษจากการหารพหุนาม $P(x)=2x^3-4x^2-3x+5$ ด้วย $x-3$

วิธีทำ เศษจากการหารเท่ากับ $P(3)=2(3)^3-4(3)^2-3\cdot 3+5 = 14$

หมายเหตุ

1. และถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $ax-b$ แล้วเศษจากการหารจะเท่ากับ $P(\frac{b}{a})$
2. เนื่องจากพหุนามที่เป็นเศษ จะต้องมีดีกรีน้อยกว่า พหุนามที่เป็นตัวหารเสมอ ดังนั้น เศษจากทฤษฎีบทเศษเหลือ ซึ่งมีตัวหารเป็นดีกรี 1 จึงเป็นค่าคงที่ (ดีกรี 0)

เพิ่มเติม การหารพหุนาม

ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n

และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m

โดย $m < n$ จะต้องมีพหุนาม $S(x)$ และ $R(x)$ ที่ทำให้

$$\underbrace{P(x)}_{\text{ตัวตั้ง}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{ตัวหาร}} \cdot \underbrace{S(x)}_{\text{ผลหาร}} + \underbrace{R(x)}_{\text{เศษ}}$$

ซึ่งดีกรีของ $R(x)$ จะน้อยกว่า m เสมอ

ทฤษฎีบทตัวประกอบ (factor theorem)

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ จะมี $x-c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

Viete's formula

ถ้า $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $n \geq 1$ และ $a_n \neq 0$ จะพบว่า $P(x)$ จะมี n คำตอบ (โดยอาจมีคำตอบที่ซ้ำกันอยู่ก็ได้) คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ และ

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
(ผลบวกของคำตอบ n ตัว)

(2) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots.. \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
(ผลคูณของคำตอบ n ตัว)

(3) กรณี ผลบวกของผลคูณของคำตอบ k ตัว $= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$
เช่น ผลบวกของผลคูณของคำตอบ 2 ตัว

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots. + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots. + x_2x_n) + \ldots. + x_{n-1} \cdot x_n$$
$$= (-1)^2 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

ระบบจำนวนจริง
(Real Number System)

By พี่เอ๋ (วิเศษ กี่สุขพันธ์)
วศ.บ. , วศ.ม. จุฬาฯ
สถาบันกวดวิชาเดอะเบรน

1. กำหนดให้ $S = \left\{x \,/\, \frac{x}{x^2-3x+2} \geq \frac{x+2}{x^2-1}\right\}$
   ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ S
   1. $(-\infty, -3)$ 2. $(-1, 0.5)$ 3. $(-0.5, 2)$ 4. $(1, \infty)$

2. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \leq 1$ อินเตอร์เซกกับเซตในข้อใดได้เซตว่าง
   1. $(-\infty, 0] \cup [1, 3)$ 2. $(1, 3] \cup (5, \infty)$
   3. $(-\infty, 1) \cup (7, 11)$ 4. $(-5, 5)$

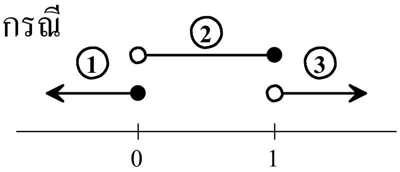
3. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{x \in R / \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1\right\}$

แล้ว $A \cap [0,1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x / \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$ 2. $\{x / \frac{1}{3} < x < 1\}$ 3. $\{x / \frac{2}{3} < x < 1\}$ 4. $\{x / \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}\}$

<u>วิธีที่ 1</u> หากทำตรงๆ โดยหา A ก่อน แล้วจึงนำไป $\cap [0,1)$

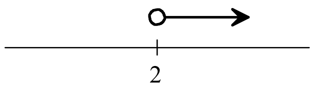
หา A โดยแบ่งกรณี



กรณี 1 $\boxed{x \le 0}$ $\rightarrow$ $x \in (-\infty, 0]$

$$\frac{(1-x)-2}{x+(-x)-3} > 1$$
$$\frac{-x-1}{-3} > 1$$
$$\frac{x+1}{3} > 1$$

$$x+1 > 3$$
$$x > 2$$

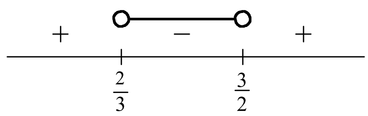


$\therefore$ คำตอบ $= (2,\infty) \cap (-\infty, 0] = \{\ \}$

กรณี 2 $\boxed{0 < x \le 1}$ $\rightarrow$ $x \in (0,1]$

$$\frac{(1-x)-2}{x+x-3} > 1$$
$$\frac{-x-1}{2x-3} > 1$$
$$\frac{-x-1}{2x-3} - 1 > 0$$
$$\frac{-x-1-(2x-3)}{2x-3} > 0$$

$$\frac{-3x+2}{2x-3} > 0$$
$$\frac{3x-2}{2x-3} < 0 \ , \ x \neq \frac{3}{2}$$

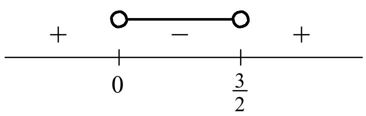


$\therefore$ คำตอบ $= (\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) \cap (0,1] = (\frac{2}{3}, 1]$

กรณี 3 $\boxed{x > 1}$ $\rightarrow$ $x \in (1,\infty)$

$$\frac{-(1-x)-2}{x+x-3} > 1$$
$$\frac{x-3}{2x-3} > 1$$
$$\frac{x-3}{2x-3} - 1 > 0$$
$$\frac{x-3-(2x-3)}{2x-3} > 0$$
$$\frac{-x}{2x-3} > 0$$

$$\frac{x}{2x-3} < 0 \ , \ x \neq \frac{3}{2}$$



$\therefore$ คำตอบ $= (0, \frac{3}{2}) \cap (1,\infty) = (1, \frac{3}{2})$

$A = \{\ \} \cup (\frac{2}{3}, 1] \cup (1, \frac{3}{2}) = (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ ดังนั้น $A \cap [0,1) = (\frac{2}{3}, 1) = \{x / \frac{2}{3} < x < 1\}$

<u>วิธีที่ 2</u> เมื่อโจทย์ถาม $A \cap [0, 1)$

ซึ่ง $x \in A \cap [0, 1)$ แสดงว่า $0 \le x < 1$ ไม่มีความจำเป็นที่ต้องหา A ในช่วง x อื่นๆ เพราะเมื่อนำมา $\cap$ $[0, 1)$ ก็จะเหลือเพียงช่วง $0 \le x < 1$

จาก $|a| = a$ เมื่อ $a \ge 0$

$|a| = -a$ เมื่อ $a < 0$

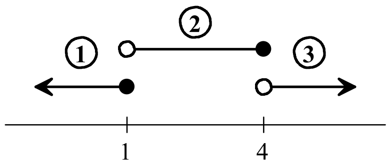
$$\boxed{\begin{aligned} |a|+|b| &\geq |a+b| \\ |a|+|b| &\geq |a-b| \end{aligned}}$$

4. จงแก้อสมการ $|x+2|+|x+5| \geq |2x+7|$

5. จงแก้อสมการ $|x^2-5x| \leq x^2+5|x|$

6. จงแก้อสมการ $|x-1|+|x-4| \leq 2$

<u>**วิธีที่ 1**</u> แบ่งกรณี



กรณี 1 $\boxed{x \leq 1} \rightarrow \quad x \in (-\infty, 1]$

$$\begin{aligned} -(x-1)+(-(x-4)) &\leq 2 \\ -x+1-x+4 &\leq 2 \\ -2x &\leq -3 \\ x &\geq \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ คำตอบ $= [\frac{3}{2}, \infty) \cap (-\infty, 1]$

$= \{\ \ \}$

กรณี 2 $\boxed{1 < x \leq 4} \rightarrow x \in (1,4]$

$$(x-1)+(-(x-4)) \leq 2$$
$$x-1-x+4 \leq 2$$
$$3 \leq 2$$

เป็นไปไม่ได้ ($\{\ \}$)

$\therefore$ คำตอบ $= \{\ \} \cap (1,4]$
$= \{\ \}$

กรณี 3 $\boxed{x > 4} \rightarrow x \in (4,\infty)$

$$(x-1)+(x-4) \leq 2$$
$$2x-5 \leq 2$$
$$x \leq \frac{7}{2}$$

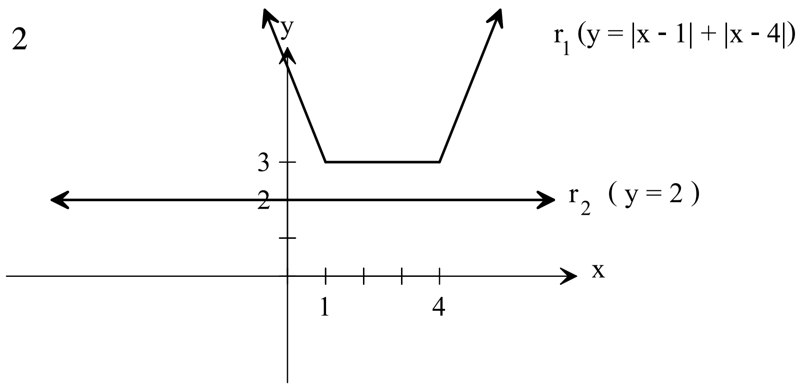
$\therefore$ คำตอบ $= (-\infty, \frac{7}{2}] \cap (4,\infty)$
$= \{\ \}$

ดังนั้น เซตคำตอบ $= \{\ \} \cup \{\ \} \cup \{\ \} = \{\ \}$

<u>วิธีที่ 2</u> ใช้ Graph

ให้ $r_1(x) = |x-1| + |x-4|$

และ $r_2(x) = 2$



จากกราฟ พบว่า ไม่มีค่า x ใด ที่ทำให้ $r_1(x) \leq r_2(x)$

ดังนั้น อสมการ $|x-1| + |x-4| \leq 2$ มี เซตคำตอบ $= \{\ \}$

<u>วิธีที่ 3</u> $|x-1|+|x-4| \le 2$

7. จงหาเซตคำตอบของ $\frac{|x-2|+|x-5|}{\S(x-2)(x-5)} \le \frac{2}{\S(x-2)(x-5)}$

8. จงหาเซตคำตอบของ $|x^2 - x| < |x - 3| + |x^2 - 3|$

9. กำหนดให้ $A = \{\frac{a}{b} \in R / ab > 0$ และ $\frac{a^3 - 5a^2b + 6ab^2}{(a-b)^3} \geq 0\}$ จงหา A

10. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $S = \{x \in R / \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$

และ $T = \{y \in R / y = 3x+1, x \in S\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> สมการติด $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ ยกกำลัง 2 และตรวจคำตอบเสมอ

11. จงแก้อสมการ $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x-1} < \sqrt{5x-1}$

<u>วิธีทำ</u> อสมการติด $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ 1. สร้างเงื่อนไข $\sqrt{\square} \rightarrow \square \geq 0$

2. ยกกำลัง 2 โดย 2 ข้างต้องเป็นบวก (≥ 0)

3. นำคำตอบ $\cap$ เงื่อนไข

12. จงหาคำตอบของสมการ $\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x} = x$

13. จงแก้อสมการ $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x} > 4x-2$

14. ถ้า $A = \{x \in R^+ / 3|x+2| \le |2x^2+x|\}$ แล้วสมาชิกของ A ที่มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$
2. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$
3. $\sqrt{13}-1$
4. $\sqrt{13}+1$

15. จงหาจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมดของอสมการ
$\left|x^4-4x^2-6\right| \ge \left|x^4-4x^2+14\right|$

1. 0
2. 1
3. 2
4. 4

16. จำนวนจริงบวก x ที่เป็นคำตอบของสมการด้านล่างนี้มีทั้งหมดกี่ตัว

$$\sqrt{x} = |x^4 - 1|$$

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

17. ถ้า a เป็นคำตอบของ $x^2 - x - 1 = 0$

จงหาค่าของ $a^6 - 2a^5 + a^3 + 5$

18. เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นเซตคำตอบของสมการ $9x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0$

1. $\{-2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\}$
2. $\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$
3. $\{-1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
4. $\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$

19. กำหนด a, b, c เป็นรากทั้ง 3 ของ $x^3 - 64x - 14$ จงหาค่าของ $a^3 + b^3 + c^3$

20. จงหาผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ

$0 = (x-1)+(x-2)^2+(x-3)^3+.....+(x-9)^9+(x-10)^{10}$

21. ถ้า r_1, r_2, r_3, r_4 เป็นคำตอบของสมการ $x^4-4x^2+2 = 0$

แล้ว $(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)$ เท่ากับข้อใด

1. -1
2. -2
3. 0
4. 1

22. กำหนด $2^{2553}-ax+1$ หารด้วย x^2-1 เหลือเศษ $r(x)$ ถ้า $r(2) = 17$ จงหาค่าของ a

23. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามซึ่งเมื่อหารด้วย $x-19$ จะเหลือเศษ 99 และเมื่อหารด้วย $x-99$ จะเหลือเศษ 19 จงหาเศษจากการหาร $P(x)$ ด้วย $(x-19)(x-99)$

24. จงหาเศษจากการหาร $2^{2002}+2^{202}+2^{22}$ ด้วย $2^{10}-1$

Hint ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

25. กำหนดให้ $a, b, c \in R$ และ $P(x) = ax^2+bx+c$ โดย $[P(x)]^5 - x$ มี $x^3-6x^2+11x-6$ เป็นตัวประกอบ แล้ว $7a+3b+2c$ มีค่าเท่าใด