



Tutor Channel on Tour

คณิตศาสตร์

อ. ชัยรัตน์ เจษฎารัตติกกร (อ. JIA)



JIAAcademy

www.JIAAcademy.com

คณิตศาสตร์เป็นเรื่องกล้วยๆ

1. ฟังก์ชัน

1.1 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นเรื่องกล้วยๆ เพราะคำตอบจะอยู่บนโจทย์

นิยาม ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
 โดเมน คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับใน f เขียนแทนด้วย D_f
 เรนจ์ คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับใน f เขียนแทนด้วย R_f

หลักการหาโดเมนและเรนจ์ด้วยการจัดรูป

ขั้นที่ 1 ต้องจัดรูปสมการโดย

หาโดเมน $\Rightarrow$ จัด y ใน เทอม $x \dots (y = ?x)$

หาเรนจ์ $\Rightarrow$ จัด x ใน เทอม $y \dots (x = ?y)$

อธิบาย y ใน เทอม x คือมี y เพียงตัวเดียว

ขั้นที่ 2 เมื่อจัดรูปเสร็จจะตรวจโดย

1. ส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์
2. ในรากต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
3. กำลังที่เป็นคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
4. ค่าสัมบูรณ์ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

Tip...

ถ้าความสัมพันธ์มีเงื่อนไขของสมการเป็น $y = \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}$ สามารถหาโดเมนและเรนจ์ด้วยสูตรลัด

เมื่อส่วนเป็นศูนย์ไม่ได้ $D_r = \dots$, $R_r = \dots$

เมื่อส่วนเป็นศูนย์ได้ $D_r = \dots$, $R_r = \dots$

Ex.1 กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{6}{3+x^2} \right\}$ จงหาเรนจ์ของความสัมพันธ์

1. $R_r = \{y \mid 0 < y < 2\}$
2. $R_r = \{y \mid y < 0 \text{ หรือ } y > 2\}$
3. $R_r = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$
4. $R_r = \{y \mid 0 < y \leq 2\}$

Ex.2 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x^2-4}{9-x^2}\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. โดเมนของ r คือ $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

ข. เรนจ์ของ r คือ $(-\infty, -1) \cup (-\frac{4}{9}, \infty)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (ENT)

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

Ex.3 กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2y - 2x^2 + 3y + 7 = 0\}$ จงหาเรนจ์ของ r

1. $\{x \mid x \in R\}$
2. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq x < 2\}$
3. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq \text{และ } x > 2\}$
4. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq \text{หรือ } x \geq 2\}$

Ex.4 กำหนด $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x^2-2x-3} \right\}$ จงหาเรนจ์ของ r (ENT)

1. $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$
2. $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (0, \infty)$
3. $[-\frac{1}{2}, 0)$
4. ไม่มีข้อถูก

Ex.5 ถ้าความสัมพันธ์ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2-4} \right\}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้คือเรนจ์

ของ r (ENT)

1. $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$
2. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
3. $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$
4. $(-\infty, 2] \cup (3, \infty)$

1.2 การหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อน

วิธี	หลัก
1. วิธีเทียบสัมประสิทธิ์โดยตรง	1. จัดกลุ่มตัวแปรของทั้งสองข้างของสมการให้เหมือนกัน 2. แทนกลุ่มตัวแปรทั้งสองข้างที่เหมือนกันด้วย x จะเจอ $f(x)$ 3. ถ้าคำถามไม่ใช่แค่ $f(x)$ ให้แทน x ด้วยสิ่งที่ต้องการ
2. สูตรลดการหาค่าฟังก์ชันทั่วไป	1. สมมติให้กลุ่มตัวแปรฝั่งซ้ายเท่ากับ A และหาค่า x ในรูปของ A 2. แทนค่าของ x ในรูปของ A ในฝั่งขวาของสมการจะเจอ $f(A)$ 3. เมื่อเปลี่ยน A เป็น x ค็นจะเจอ $f(x)$
3. สูตรการหาค่าฟังก์ชันของ JIA	

Ex.6 กำหนดให้ $f(x+1) = 2x - 1$ จงหา $f(x)$

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรลดทั่วไป

วิธีที่ 3 สูตรของ JIA

$$f(x+1) = 2x - 1$$

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ex.7 กำหนดให้ $f(x-1) = 3x + 4$ จงหา $f^{-1}(x+1)$

วิธีที่ 1 (วิธีทั่วไป)

วิธีที่ 2 สูตรลดทั่วไป

วิธีที่ 3 สูตรของ JIA

$$f(x-1) = 3x + 4$$

$$f^{-1}(x+1) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Ex.8 กำหนดให้ $f(2x-3) = 5x+7$ จงหาค่าของ $f^{-1}(-3)$

- | | |
|------|-------|
| 1. 8 | 2. -8 |
| 3. 7 | 4. -7 |

Ex.9 กำหนดให้ $f\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{2}x-1$ จงหาว่า $f^{-1}(2)$ ตรงกับข้อใด

- | | |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 2 |
| 3. 4 | 4. 6 |

Ex.10 กำหนดให้ $f(6x+4) = 3x-1$ จงหา $f^{-1}(x+1)$

- | | |
|-----------|-----------|
| 1. $2x+4$ | 2. $2x+8$ |
| 3. $2x-4$ | 4. $2x-8$ |

Ex.11 กำหนดให้ $f(x) = 3x-1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ค่าของ $f^{-1}(g(2)+g(-8))$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1)

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ | 2. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ |
| 3. $\frac{1-\sqrt{2}}{-3}$ | 4. $\frac{1+\sqrt{2}}{-3}$ |

Tip... การใช้สูตรลัดของ JIA ในการหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนจะสามารถใช้ได้กับโจทย์ทุกข้อ
แต่เมื่อทำโจทย์เป็นจำนวนมากก็ควรรู้เพิ่มว่า

1. โจทย์ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนมากควรจะลดทอนตัวแปรโดยการทำให้เป็น.....
ก่อนแล้วค่อยใช้สูตรลัด
2. โจทย์ที่มีตัวแปรกำลังหนึ่งหารกันและให้หา $f^{-1}(x)$ ควรจะใช้สูตรลัดเฉพาะ.....
..... จะเร็วกว่า (เร็วที่สุด)

Ex.12 ถ้า $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ ค่าของ $f^{-1}(-6)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -4
2. -1
3. 1
4. ไม่มีข้อถูก

Ex.13 ถ้า $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ และ $g(x-2) = 2x-3$ แล้ว $f^{-1}(-4) - g^{-1}(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3
2. -1
3. 1
4. 3

Ex.14 ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $(f \circ g)(x+2) = 3x+6$ แล้ว $g(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(ENT)

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{12}{5}$
4. $\frac{24}{11}$

2. สถิติ

2.1 เทคนิคการใช้พื้นที่ใต้กราฟเข้าช่วยทำโจทย์สถิติให้เป็นเรื่องกล้วยๆ



Ex.15 กำหนดให้ค่าจ้างรายวันของคณงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนคณงาน
81 - 85	1
86 - 90	3
91 - 95	x
96 - 100	5
101 - 105	8
106 - 110	y
111 - 115	10
116 - 120	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้วจำนวนคณงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ENT)

1. 16 คน
2. 22 คน
3. 28 คน
4. 24 คน

Ex.16 อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ดังนี้

อายุ (ปี)	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
จำนวนเด็ก	2	a	8	7	3

a เป็นจำนวนจริง ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของอายุของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 6.5 ปี แล้วเด็กในกลุ่มนี้ที่มีอายุต่ำกว่า 10 ปีมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ENT)

1. 14 คน
2. 15 คน
3. 16 คน
4. 17 คน

Ex.17 ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $Q_1 = 65.5$ และมัธยฐานมีค่าเท่ากับ 75.5 แล้ว $x+y$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ENT)

ช่วงคะแนน	ความถี่
46 - 55	4
56 - 65	x
66 - 75	y
76 - 85	10
86 - 95	7
96 - 105	3

1. 15
2. 16
3. 17
4. 18

Ex.18 กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงความสูงของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

ความสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน (คน)
120 – 129	10
130 – 139	20
140 – 149	40
150 – 159	50
160 – 169	30

ข้อใดต่อไปนี้ถูก (PAT 1)

1. มัธยฐานของความสูงมีค่าน้อยกว่า 149 เซนติเมตร
2. ร้อยนิยมของความสูงมีค่าน้อยกว่า 147 เซนติเมตร
3. ควอไทล์ที่ 3 ของความสูงมีค่ามากกว่า 150 เซนติเมตร
4. เปอร์เซ็นไทล์ที่ 20 ของความสูงมีค่ามากกว่า 145 เซนติเมตร

2.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่คิดเลขได้ยากๆก็มีวิธีลัดที่ทำให้เป็นเรื่องกล้วยๆ

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $S.D. = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$ (สูตรทั่วไป)

Ex.19 กำหนดข้อมูล 5 จำนวนไว้ดังนี้ 5 10 15 20 25 จงคำนวณหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล

1. $5\sqrt{2}$
2. $5\sqrt{3}$
3. $7\sqrt{2}$
4. $7\sqrt{3}$

Ex.20 กำหนดข้อมูล 5 จำนวนไว้ดังนี้ 5940 , 7128 , 8316 , 9504 , 10692 จงคำนวณหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $1188\sqrt{2}$ | 2. $1188\sqrt{3}$ |
| 3. $2288\sqrt{2}$ | 4. $2288\sqrt{3}$ |

Ex.21 ในการสำรวจการชำระภาษีเงินได้ของผู้จัดการบริษัท 5 แห่ง ปรากฏผลดังนี้ 12,539 12,565 12,526 12,513 และ 12,552 บาท จงคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเงินภาษีเหล่านี้

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. $12\sqrt{2}$ | 2. $12\sqrt{3}$ |
| 3. $13\sqrt{2}$ | 4. $13\sqrt{3}$ |

Ex.22 กำหนดข้อมูล 7 จำนวนไว้ดังนี้ 5 10 30 20 15 25 35 จงคำนวณหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล

- | | |
|------|-------|
| 1. 5 | 2. 7 |
| 3. 9 | 4. 10 |

2.3 เพราะสูตรที่มากมายสถิติเลยทำให้เรื่องนี้เป็นเรื่องกล้วยๆ

การวัดการกระจายของข้อมูลแบ่งออกได้ 2 กลุ่ม คือ

การกระจายสมบูรณ์ (Absolute Variation)	การกระจายสัมพัทธ์ (Relative Variation)
1. พิสัย $R = x_{\max} - x_{\min}$	1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย $C.R. = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$
2. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $M.D. = \frac{\sum x_i - \bar{x} }{N}$	3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $C.M.D. = \frac{\sum x_i - \bar{x} }{\sum x_i}$
4. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $S.D. = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$	4. สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $V = \frac{S.D.}{\bar{X}}$

Ex.23 กำหนดข้อมูล 2 ชุดดังนี้

ชุดที่ 1 : 6 , 12 , 9 , 10 , 6 , 8

ชุดที่ 2 : 60 , 64 , 56 , 70 , 52 , 63

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (ENT)

1. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายน้อยกว่าข้อมูลชุดที่ 2
2. ข้อมูลชุดที่ 2 กระจายน้อยกว่าข้อมูลชุดที่ 1
3. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายเท่ากับข้อมูลชุดที่ 2
4. เปรียบเทียบการกระจายของข้อมูล 2 ชุดไม่ได้

Ex.24 จากข้อมูลที่กำหนดให้

ชุด A 5 10 15 20 25

ชุด B 15 30 45 60 50

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (ENT)

- ก. ข้อมูลชุด B มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมากกว่าข้อมูลชุด A
- ข. ข้อมูลชุด B มีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันน้อยกว่าข้อมูลชุด A
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. ข้อ ก. และ ข. ถูกต้อง
 2. ข้อ ก. ถูกต้อง และข้อ ข. ผิด
 3. ข้อ ก. ผิด และข้อ ข. ถูกต้อง
 4. ข้อ ก. และ ข. ผิด

Ex.25 เพื่อเปรียบเทียบความเที่ยงตรงของเครื่องชั่งน้ำหนัก 2 เครื่อง ก และ ข จึงได้ทำการทดลองชั่งน้ำหนักวัตถุมาตรฐานที่มีน้ำหนัก 10 กรัมขึ้นหนึ่งเป็นจำนวน 6 ครั้ง บันทึกน้ำหนักที่อ่านได้จากเครื่องชั่งทั้ง 2 ได้ข้อมูลดังนี้ (ENT)

การทดลองครั้งที่	น้ำหนักที่อ่าน (กรัม) จาก	
	เครื่องชั่ง ก	เครื่องชั่ง ข
1	9	10
2	10	9
3	9	9
4	9	8
5	10	7
6	7	9

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. เครื่องชั่ง ก มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเครื่องชั่ง ข
2. เครื่องชั่ง ข มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเครื่องชั่ง ก
3. เครื่องชั่งทั้ง 2 มีความคลาดเคลื่อนเท่ากัน
4. ไม่สามารถสรุปได้ เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ