จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม

1. **เรื่องของ i** ... $i = \sqrt{-1}\ , i^2 = -1, i^3 = -1, i^4 = 1$

   $i^n = i$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 1

   $i^n = -1$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 2

   $i^n = -i$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 3

   $i^n = 1$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 0 (หารลงตัว)

   และ $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$

2. **สังยุค** : $Z = a + bi, \overline{Z} = a - bi$

   1. $Z + \overline{Z} = 2a \ \rightarrow\ a = \frac{Z+\overline{Z}}{2} \ \rightarrow\ \mathrm{Re}(Z) = \frac{Z+\overline{Z}}{2}$
   2. $Z - \overline{Z} = 2bi \ \rightarrow\ b = \frac{Z-\overline{Z}}{2i} \ \rightarrow\ \mathrm{Im}(Z) = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}$
   3. $Z\overline{Z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$
   4. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\ ,\ \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z}_1 - \overline{Z}_2$
   5. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2\ ,\ \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2},\ Z_2 \neq 0$
   6. $\overline{\overline{Z}} = Z$
   7. $\overline{(Z^n)} = (\overline{Z})^n$
   8. $\overline{(Z^{-1})} = (\overline{Z})^{-1}$

3. **ตัวผกผันการบวก และตัวผกผันการคูณ** : $Z = a + bi$

   ตัวผกผันการบวกของ $Z = -Z = -a - bi$

   ตัวผกผันการคูณของ $Z = Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{\overline{Z}}{Z\overline{Z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

4. **ค่าสัมบูรณ์** : $Z = a + bi \ \rightarrow\ |Z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

   1. $|Z| = \left|\overline{Z}\right| = |-Z| = \left|-\overline{Z}\right|$
   2. $Z \cdot \overline{Z} = |Z|^2 = \left|\overline{Z}\right|^2 = \left|-\overline{Z}\right|^2 = \left|-\overline{Z}\right|^2$
   3. $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|\ ,\ \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|};\ |Z_2| \neq 0$
   4. $|Z^n| = |Z|^n$
   5. $\left|Z^{-1}\right| = |Z|^{-1} = \frac{1}{|Z|}$

5. **<u>รากที่ 2</u>** : $Z^2 = a \pm bi$

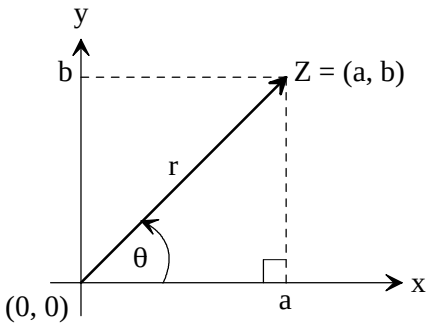
$Z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{r-a}{2}}\, i\right); r = |a \pm bi|$

เพิ่มเติม : กำหนด $Z^n = a \pm bi$

และ $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ เป็นรากคำตอบของสมการ

1. $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n = 0$
2. $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = \ldots = |Z_n|$

6. **<u>จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว</u> (Polar Form)**



$Z = a + bi$

$= r[\cos\theta + i\sin\theta] = r\,\mathrm{cis}\theta$

$r = |Z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, θ เรียก argument ของ Z

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $Z_1 = r_1\mathrm{cis}\theta_1$ และ $Z_2 = r_2\mathrm{cis}\theta_2$

จะได้ว่า $\boxed{Z_1 = Z_2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } r_1 = r_2 \text{ และ } \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \text{ เมื่อ } n \in I}$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $Z = r\mathrm{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{Z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$\boxed{\bar{Z} = r\mathrm{cis}(-\theta)}$

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $Z = r\mathrm{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-Z = -r\mathrm{cis}\theta = (-1)(r\mathrm{cis}\theta)$

$-Z = (\mathrm{cis}180^\circ)(r\mathrm{cis}\theta)$

$\boxed{-Z = r\mathrm{cis}(180^\circ + \theta)}$

ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $Z = r\mathrm{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{r\mathrm{cis}(-\theta)}{r^2}$

$\boxed{Z^{-1} = \frac{1}{r}\mathrm{cis}(-\theta)}$

การคูณและการหารรูปเชิงขั้ว

ให้ $Z_1 = r_1\text{cis}\theta_1, Z_2 = r_2\text{cis}\theta_2$

$Z_1 \cdot Z_2 = r_1r_2\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$

การยกกำลัง

ให้ $Z = r\text{cis}\theta$

$Z^n = r^n\text{cis}n\theta$, n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

การถอดรากที่ n

ให้ $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\text{cis}\theta$

การถอดรากที่ n ของ Z ให้ทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. หา $\sqrt[n]{r}$ ใส่หน้า cis
2. หา $\frac{\theta}{n}$ ใส่หน้า cis
3. นำ $\frac{360^\circ}{n}$ บวกจนครบ

7. **<u>สมการพหุนาม</u>** : $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$

1. ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ แล้ว เศษจากการหารจะเท่ากับ $P(c)$
2. ถ้า $P(c) = 0$ แล้ว $(x - c)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ และ c เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$
3. ถ้า $P(a + bi) = 0$ แล้ว $P(a - bi) = 0$ ด้วย เมื่อสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ $P(x)$ เป็นจำนวนจริง เรียก ทฤษฎีบทคู่คอนจุเกต
4. สมการ $P(x) = 0$ จะมี

ผลบวกคำตอบ $= -a_{n-1}$

ผลคูณคำตอบ $= (-1)^n(a_0)$

} เรียก สูตรของวีต

ตะลุยโจทย์ PAT 1 ความถนัดทางคณิตศาสตร์
เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน และ สมการพหุนาม โดยพี่ช้าง (เดอะ เบรน)

1. Compute $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot i^{2000}$

2. กำหนดให้ $a_{n+1} = ia_n + 1$ โดย $a_1 = 1 + i$ จงหาค่าของ $\left|\sum_{i=1}^{100} a_i\right|$

3. 7^{2538} มีหลักหน่วยเป็นเลขใด

   1. 1 2. 3 3. 7 4. 9

4. The unit digit (base 10) of $2^{3^{456789}}$ is

   1. 2 2. 4 3. 6 4. 8

5. กำหนดให้ $f(x) =$ หลักหน่วยของ $2^x + 3^{x+2}$ ค่าของ $f(100)$ คือข้อใด

1. 3 2. 5 3. 7 4. 9

6. If $(1+i)^{100}$ is expanded and written in the form $a+bi$ where a and b are real numbers, then a =

1. -2^{50} 2. $20^{50} - \frac{100!}{50!50!}$ 3. $\frac{100!}{(25!)^2 50!}$ 4. 0
5. $100!\left(\frac{-1}{50!50!} + \frac{1}{25!75!}\right)$

7. ถ้า $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{100}$ แล้วค่าของ $z^{2553} + \frac{1}{z^{2553}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

8. กำหนดให้ $Z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^7$ แล้ว Im(Z) คือข้อใด

1. -1 2. 15 3. -15 4. 1

9. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $Z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ แล้วค่าของ $Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5 + Z^6$ เท่ากับเท่าใด (Waseda University)

10. Let x_1 and x_2 be the roots of the equation $x^2 - x + 1 = 0$

Compute

a) $x_1^{1999} + x_2^{1999}$

b) $x_1^{2000} + x_2^{2000}$

11. กำหนดให้ $(2^{a+bi})(3^{4+c}) = 36\left(4^{2+i}\right)$ แล้วค่าของ $a+b+c$ เป็นเท่าใด

12. ส่วนจินตภาพของ $(2+\sqrt{5}\,i)^7+(2-\sqrt{5}\,i)^7$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. $-\frac{3}{2}$ 3. 0 4. กำลังงง!

13. ให้ $i\overline{Z}+\overline{6-4Z}=5$ ตัวผกผันการบวกของ Z^{-1} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4-i$ 2. $4+i$ 3. $-4+i$ 4. $-4-i$

14. ตัวผกผันการบวกของ $(3+4i)^4-(4+3i)^4$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-672i$ 2. $-512i$ 3. $512i$ 4. $672i$

15. กำหนดให้ Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|Z_1+Z_2|^2=5$ และ $|Z_1-Z_2|^2=1$ ค่าของ $|Z_1|^2+|Z_2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค.52)

1. 3 2. 4 3. 5 4. 6

16. กำหนดให้ Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|Z_1+Z_2|^2=5$ และ $|Z_1-Z_2|^2=1$ ค่าของ $|Z_1|^2+|Z_2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค.52)

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

17. กำหนดให้ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $Z^4+1=0$ ค่าของ $\left|Z+\frac{1}{Z}\right|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค.52)

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

18. กำหนดให้ Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $Z_1+Z_2=\sqrt{2}$ และ $|Z_1|=|Z_2|=1$ ข้อใดคือค่าของ $\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $\sqrt{2}$ 4. 2

19. กำหนดให้ $Z_1^2Z_2=1+i$ และ $Z_1Z_2^2=1-i$ ค่าของ $|Z_1-Z_2|$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\sqrt{2}$ 3. $\sqrt[3]{2}$ 4. $\sqrt[3]{4}$

20. กำหนดให้ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับ $Z^3 - 2Z^2 + 2Z = 0$ และ $Z \neq 0$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ Z อยู่ในช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ แล้ว $\frac{Z^4}{(\bar{Z})^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค.52)

1. $-2i$ 2. $1 - i$ 3. $1 + i$ 4. $2i$

21. กำหนดให้ W, Z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\overline{W} = Z - 2i$ และ $|W|^2 = Z + 6$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ W อยู่ในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ และ $W = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค.52)

22. ถ้า $e^x - ie^{-x} = 0$ แล้ว $e^x + ie^{-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i,\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
2. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
3. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
4. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

23. ถ้า $z_k = a_k + b_k i$ เป็นรากที่ 6 ของ 64 แล้ว จงหา $\sum_{k=1}^{6} |a_k|$

24. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค.52)

1. 2.1 2. 2.2 3. 3.3 4. 3.5

25. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 4 4. 5

26. The sum of all the roots of $4x^3 - 8x^2 - 63x - 9 = 0$ is :

1. 8 2. 2 3. -8 4. -2 5. 0

27. a, b, c และ 3i เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 18x + 45 = 0$

ค่าของ $(a+b+c)^2$ ตรงกับข้อใด

1. $13 - 12i$ 2. $-13 - 12i$ 3. $5 - 12i$ 4. $-5 - 12i$

28. ให้ x_1, x_2, x_3 และ x_4 เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$

ค่าของ $|x_1||x_2||x_3||x_4|$ คือข้อใด

1. 1 2. 3 3. 6 4. 12

29. ให้ a และ b เป็นรากของสมการ $x^2+2x+6 = 0$ จงหาว่า a^3+b^3 เท่ากับข้อใด

1. 22 2. 28 3. 34 4. 40

30. If p, q and r are distinct roots of $x^3-x^2+x-2 = 0$, then $p^3+q^3+r^3$ equals

1. -1 2. 1 3. 3 4. 5 5. none of these

31. ให้ $z=\frac{\sqrt{8}\,(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)}{\sqrt{2}\,(\cos 56^\circ+i\sin 56^\circ)}$ ส่วนจริงของ z^5 คือค่าในข้อใด

1. $-16\sqrt{3}$ 2. -16 3. 16 4. $16\sqrt{3}$

32. ถ้า $z=\cos\theta+i\sin\theta$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)^4$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $-16\sin^4 n\theta$ 2. $16\sin^4 n\theta$ 3. $-16\cos^4 n\theta$ 4. $16\cos^4 n\theta$

33. จำนวนเชิงซ้อน $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}\right)^{2007}$ เท่ากับข้อใด

1. i 2. $-i$ 3. 1 4. -1

34. กำหนดให้ $Z=(\sin 3^\circ+i\cos 3^\circ)$ แล้วค่าของ $\left|Z^{30}+Z^{60}\right|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{3}$ 4. 2

35. ให้ x คือรากของสมการ $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ ข้อใดคือค่าของ $x^{2552}+\frac{1}{x^{2552}}$

1. 1 2. -1 3. 2 4. -2