



วิชาคณิตศาสตร์

โดย

อ.ภาคภูมิ อร่ามวารีกุล

ลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีลิมิต

ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$
เมื่อ A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า



$+$ $-$ $\times$ $\div$ limit กระจายได้หมด

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = \begin{cases} 0; k > 0 \\ \infty; k < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0; |r| < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้}; |r| > 1 \end{cases}$

ลิมิตของลำดับเศษส่วนพหุนาม



- พหุนาม ดูดีกรีสูงสุด

เทคนิคการหาลิมิต
ของลำดับเศษส่วนพหุนาม

พหุนาม

♥ ดีกรีสูงสุดของเศษน้อยกว่าส่วน

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 2n + 3}{n^4 + 4} = 0$$

♥ ดีกรีสูงสุดของเศษเท่ากับส่วน

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4n + 1}{4n^3 + 2n^2 - 3} = \frac{1}{2}$$

♥ ดีกรีสูงสุดของเศษมากกว่าส่วน

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n^2 + 2n + 1} = \infty$$



1. ถ้า a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
หาค่าได้ และ $a_n = \sqrt{\frac{1+2n}{n}} + a_n$
แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$a_1 = 1 \text{ และ } a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด

ชีกมา + ลำดับเลขคณิต, เรขาคณิต

สัญลักษณ์แทนการบวก

$\sum_{i=1}^n c = nc$ (c เป็นค่าคงที่)	$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$	$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$	$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์ที่ $n+1$ กับพจน์ที่ n เป็นค่าคงที่ เรียกค่าคงตัวนั้นว่า “ผลต่างร่วม” ($d = a_{n+1} - a_n$)
พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 + (n-1)d$

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงที่
เรียกค่าคงตัวนั้นว่า “อัตราส่วนร่วม” ($r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$)
พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 r^{n-1}$

3. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ
 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ สมมติว่า a_2, a_4, a_8 เรียงกันเป็น
ลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ n ที่ทำให้

$$\frac{(a_1 - 1)^3 + (a_2 - 1)^3 + \dots + (a_n - 1)^3}{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} = \frac{391}{450}$$

อนุกรมจำกัด, อนุกรมอนันต์

อนุกรมเลขคณิต/ เรขาคณิต

อนุกรมจำกัด (ผลบวก n พจน์แรก) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

อนุกรมอนันต์ $S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ โดย $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$



- อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกได้
เรียกว่า “อนุกรมลู่เข้า” (Convergent Series)
- อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกไม่ได้
เรียกว่า “อนุกรมลู่ออก” (Divergent Series)

	จำกัด	อนันต์
อนุกรมเลขคณิต	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	$0 + 0 + 0 + \dots = 0$
อนุกรมเรขาคณิต	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}; r < 1$



กรณีอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์

ถ้า $|r| \geq 1$ จะเป็น “อนุกรมลู่ออก” หรือหาผลบวกไม่ได้

4. ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง

$$\text{โดยที่ } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{n+1}{2n-1}$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

ค่าของ $\frac{2b_{100}}{a_{100}}$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ $a_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{3^{2n}}$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$

2. $\frac{1}{8}$

3. $\frac{9}{56}$

4. $\frac{2}{7}$

5. $\frac{25}{56}$

6. กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
โดยที่ $3a_{n+1} = a_n$ และ $2^n b_n = a_n$
สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $a_5 = 2$ แล้ว
อนุกรม $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ มีผลบวกเท่ากับเท่าใด

อนุกรมผสม

อนุกรมเลขคณิตกับเรขาคณิต → ให้ทำดังนี้



1. ให้ S_n เป็นสมการ (1)
2. สร้างสมการ (2) โดยนำ r คูณสมการ (1)
3. นำทั้งสองสมการมาลบกัน

7. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $\sum_{n=1}^{25} a_n = 1900$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = 8$ ค่าของ a_{100} ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. 298
 2. 302
 3. 400
 4. 499
 5. 598

8. ถ้า $f(x) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot x^{2k-1}$ แล้ว $\frac{1}{\sqrt{2}} f(\sqrt{2})$

มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + 99 \cdot 2^{99}$
2. $1 + 100 \cdot 2^{99}$
3. $\sqrt{2} + 99 \cdot 2^{99}$
4. $1 + 99 \cdot 2^{100}$
5. $1 + 100 \cdot 2^{100}$

อนุกรมเศษส่วนย่อย



Trick

$$\Sigma \frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \Sigma \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right]$$

$$\Sigma \frac{1}{n(n+d)(n+2d)} = \frac{1}{2d} \Sigma \left[\frac{1}{n(n+d)} - \frac{1}{(n+d)(n+2d)} \right]$$

9. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม

เท่ากับ $\frac{2}{21}$ แล้วผลรวม

$$\frac{1}{21(a_{20}-a_1)} + \frac{1}{19(a_{19}-a_2)} + \frac{1}{17(a_{18}-a_3)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{5(a_{12}-a_9)} + \frac{1}{3(a_{11}-a_{10})}$$

มีค่าเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. 2
5. 5

10. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของ

จำนวนจริง โดยที่ $b_n = (a + n - 1)(a + n)$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า a สอดคล้องกับ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \dots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}} \right) = \frac{1}{312}$$

แล้วค่าของ $a^2 + 57$ เท่ากับเท่าใด

11. กำหนดให้ $a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{4}$
2. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{3}{4}$
3. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{6}$
4. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{6}$
5. อนุกรมลู่ออก