โดย อาจารย์ไมตรี ศรีทองแท้

ความสัมพันธ์ (Relations)

1. คู่อันดับ (Ordered Pair)

คือการจับคู่กันระหว่างของ 2 สิ่ง คู่อันดับแต่ละคู่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือ สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง โดยทั่วไปนิยมใช้คู่อันดับ (a, b) หรือ (x, y) เมื่อ a และ x หมายถึงสมาชิกตัวหน้า b และ y หมายถึงสมาชิกตัวหลัง

การเท่ากันของคู่อันดับ คู่อันดับ 2 คู่อันดับใด ๆ จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อ สมาชิกตัวหน้าของสองคู่อันดับนั้นเท่ากัน และสมาชิกตัวหลังของสองคู่อันดับนั้นต้องเท่ากัน กล่าวคือ

นิยาม $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
$(a, b) \neq (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

โจทย์ตัวอย่างลองทำดู....

1. กำหนด $x, y \in R$ ถ้า $(3x - y, 2x + y) = (y + 4, x - 7)$ แล้วคู่อันดับ $\left(xy, \frac{2y}{x}\right)$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด

2. ถ้า $(4x - 1, y) = (3y + 2, x - 2)$ แล้วคู่อันดับ $(x + y, x - y)$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งหมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

ดังนั้น

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$
$$B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \text{ และ } y \in A\}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b\}$

ดังนั้น $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \}$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว แล้ว $A \times B$ จะมีสมาชิก $m \times n$ ตัว และเท่ากับสมาชิกของ $B \times A$
2. ถ้า $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$ จะได้ว่า $A \times B = B \times A = \varnothing$
3. $A \times B$ ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ $B \times A$
4. $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$
5. ถ้า $A \times B = A \times C$ แล้ว B ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ C
6. ถ้า $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \varnothing$ แล้ว $B = C$
7. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
8. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

✡ ✡ ✡ ✡ ✡ ✡ ✡ ✡

แบบฝึกหัดวัดความเข้าใจ

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{3, 4\}$ จงหา

1. $A \times B =$

2. $B \times A =$

3. $B \times C =$

4. $C \times C =$

5. $A \times (B \cup C) =$

6. $(A \times B) \cup (A \times C) =$

7. $A \cap (B \times C) =$

8. $(A \cap B) \times (A \cap C) =$

9. $(A \times B) \cup C =$

10. $(A \cup C) \times (B \cup C) =$

ข้อควรระวัง

1. $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$

2. $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$

3. $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$

ความสัมพันธ์ (Relations)

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ r จะต้องเป็นเซตของคู่อันดับ หรือเป็นเซตว่าง ดังนั้น กำหนดบทนิยามได้ดังนี้ :-

> บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ
> r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ข้อสังเกต

1. เรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์** ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป R
2. เรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์บน A** ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A

ข้อสรุป จากบทนิยามของความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. ความสัมพันธ์เป็นเซต
2. เซตที่เป็นความสัมพันธ์ต้องมีสมาชิกเป็นคู่อันดับหรือไม่มีสมาชิก
3. คู่อันดับที่อยู่ในความสัมพันธ์นั้นต้องอยู่ภายใต้กฎเกณฑ์ที่กำหนด
4. ความสัมพันธ์เป็นเซต ดังนั้นการเขียนความสัมพันธ์จึงเขียนได้ 2 ลักษณะ คือ
   4.1 เขียนแบบแจกแจงสมาชิก
   4.2 เขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
5. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว ดังนั้น $A \times B$ จะมีสมาชิก mn ตัว นั่นคือ สับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ จะเท่ากับ 2^{mn} เซต และ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ นั่นคือจะมีความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่ต่างกันเท่ากับ 2^{mn} ความสัมพันธ์

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
จงเขียนความสัมพันธ์ r ในรูปของการแจกแจงสมาชิก
เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ในรูปแบบบอกเงื่อนไข

$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$

$r_1 =$

$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$

$r_2 =$

$r_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt[3]{x}\}$

$r_3 =$

$r_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

$r_4 =$

$r_5 = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\}$

$r_5 =$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ $y\}$

$r =$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 9\}$

$r =$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $A = \{3, 4, 6\}$ และ $B = \{2, 3, 6, 8\}$
และ r_1 เป็นความสัมพันธ์ "เป็นสองเท่า" จาก B ไป A

$r_1 =$

และ r_2 เป็นความสัมพันธ์ "เป็นสองเท่า" จาก A ไป B

$r_2 =$

และ r_3 เป็นความสัมพันธ์ "มากกว่า" จาก B ไป A

$r_3 =$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ใด คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดที่อยู่ในความสัมพันธ์
เรนจ์ของความสัมพันธ์ใด คือ เซตของสมาชิกตัวหลังทั้งหมดที่อยู่ในความสัมพันธ์

บทนิยาม ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
โดเมนของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย D_r
โดยที่ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$
เรนจ์ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย R_r
โดยที่ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

การหาค่าโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

ลักษณะความสัมพันธ์ r	โดเมนของความสัมพันธ์ r	เรนจ์ของความสัมพันธ์ r
1. เซตแบบแจกแจงสมาชิก	เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r	เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r
2. เซตแบบบอกเงื่อนไข	จัด y ในเทอมของ x แล้วพิจารณาค่า x ค่าของ x ทุกค่าที่ทำให้สมการเป็นจริงคือค่าโดเมนที่ต้องการ	จัด x ในเทอม y แล้วพิจารณาค่า y เช่นเดียวกับการพิจารณาค่า x แต่ต้องคำนึงถึงค่า y จากสมการเดิม
3. กราฟของความสัมพันธ์	ให้ Project จุดต่าง ๆ ทุกจุดลงมาบนแกน x แล้วพิจารณาค่า x ว่าอยู่ในช่วงใด	Project จุดต่าง ๆ ทุกจุดลงมาบนแกน y แล้วพิจารณาค่า y ว่าอยู่ในช่วงใด

หมายเหตุ * การพิจารณาค่าเรนจ์จากเซตแบบบอกเงื่อนไขต้องคำนึงถึงสมการเดิมด้วย

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ซึ่งอยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(4, 8), (5, 6), (7, 9), (8, 10)\}$

$D_r = \{4, 5, 7, 8\}$

$R_r = \{6, 8, 9, 10\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ซึ่งอยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก มีหลักในการหาดังนี้

1. ถ้าต้องการหาค่าโดเมนของความสัมพันธ์ ซึ่งอยู่ในรูปสมการจะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูปของ $y = f(x)$ [y ในเทอม x] แล้วพิจารณาค่า x ค่า x ใด ๆทุกค่าที่ทำให้สมการเป็นจริงตามเงื่อนไขที่กำหนด ก็คือค่าของโดเมนที่ต้องการ และค่า x ใด ๆ ที่ทำให้สมการไม่เป็นจริง ก็คือค่าที่ต้องยกเว้น ดังนั้นการพิจารณาค่า x มีดังนี้

   1.1 ค่า x ที่ต้องยกเว้นคือค่า x ที่แทนค่าแล้วทำให้ส่วนเป็นศูนย์

   1.2 ค่า x ที่แทนค่าแล้วทำให้จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายรากหรือกรณฑ์ที่เป็นเลขคู่เป็นค่าติดลบ

   1.3 ค่า x ที่ไม่สอดคล้องกับสมการหรือข้อกำหนด

2. การหาค่าเรนจ์ของความสัมพันธ์ ใช้หลักการและวิธีการเช่นเดียวกับการหาค่าโดเมน แต่ต้องจัดสมการให้อยู่ในรูปของ $x = f(y)$ [x ในเทอม y] แล้วพิจารณาค่า y เช่นเดียวกับการพิจารณาค่า x แต่ต้องพิจารณาค่า y จากสมการเดิมประกอบด้วยว่ามีข้อจำกัดอย่างไร

ตัวอย่าง กำหนด $r = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9 - x^2}\right\}$

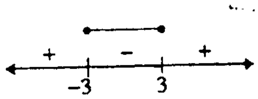
หาค่าโดเมน (1) จัดสมการให้ $y = \sqrt{9 - x^2}$

(2) พิจารณาค่า x จากสมการ

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x - 3)(x + 3) \leq 0$$



หาค่าเรนจ์

นั่นคือจะได้ว่า $D_r = [-3, 3]$

ตัวอย่าง กำหนด $r = \left\{(x,y) \middle| y = \frac{4x-5}{3x+2}\right\}$

จากสมการ $y = \frac{4x-5}{3x+2}$

$$D_r = R - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

$$R_r = R - \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

การหา D_r และ R_r จากหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปดังกล่าวแล้วยังมีหลักเกณฑ์ย่อย ๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์อีกมากมาย ซึ่งในเอกสารฉบับนี้ขอสรุปเพิ่มเติมอีกเล็กน้อยจากหลักเกณฑ์บางหลักเกณฑ์ดังนี้

1. ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์อยู่ในรูปสมการที่เป็นเศษส่วน
 ใช้หลักว่าส่วนไม่เท่ากับ 0

ตัวอย่าง $r = \left\{(x,y) \middle| y = \frac{2}{x^2-4}\right\}$

จากสมการ $y = \frac{2}{x^2-4}$ จะหาค่า y ได้เมื่อ $x^2 - 4 \neq 0$

$$x^2 \neq 4$$

$$x \neq \pm 2$$

ดังนั้น $D_r = R - \{2, -2\}$

จาก $y = \frac{2}{x^2-4}$

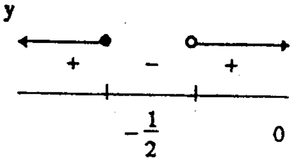
$$x^2 - 4 = \frac{2}{y}$$

$$x^2 = 4 + \frac{2}{y}$$

$$x^2 = \frac{4y+2}{y}$$

$$\frac{4y+2}{y} \geq 0$$

$$\frac{2y+1}{y} \geq 0$$



$$R_r = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (0, \infty)$$

2. ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r อยู่ในรูป

$$r = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{ax+b}{cx+d}\right\}$$

จะได้ว่า $D_r = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

$$R_r = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

หรือ $R_r = R - \left\{\frac{\text{สัมประสิทธิ์ของ x ที่เศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ของ x ที่ส่วน}}\right\}$

ตัวอย่าง กำหนด $r = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{7x-5}{9x-16}\right\}$

จาก $y = \frac{7x-5}{9x-16}$

จะได้ว่า $D_r = R - \left\{\frac{16}{9}\right\}$

$R_r = R - \left\{\frac{7}{9}\right\}$

โจทย์แบบฝึกหัด จงหาค่าโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ที่กำหนดให้

1. $r_1 = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{2x-3}{3x+2}\right\}$

2. $r_2 = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{4x}{3x+5}\right\}$

3. $r_3 = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{4x+2}{6x-5} + 5\right\}$

4. $r_4 = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{x}{x+4} - 4\right\}$

5. $r_5 = \left\{(x,y) \in R \times R \middle| y = \frac{3x-1}{4-x} + 2\right\}$

3. ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปสมการที่ (จำนวนจริงใด ๆ)^2

ให้ใช้หลักว่า (จำนวนจริงใด ๆ)$^2 \geq 0$ เสมอ

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid (x-1)^2 = y - 3\}$

จากสมการ $y - 3 = (x - 1)^2$

พิจารณาค่า x จากสมการ จะได้ว่า ไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ $(x - 1)^2$ ก็จะเป็น

จำนวนจริงเสมอ นั่นคือ $x \in R$

ดังนั้น $D_r = R$

จากสมการ $y - 3 = (x - 1)^2$ แต่ $(x - 1)^2 \geq 0$

ดังนั้น $y - 3 \geq 0$

$y \geq 3$

นั่นคือ $R_r = [3, \infty)$

4. ถ้าเงื่อนไขของสมการของความสัมพันธ์อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ

ให้ใช้หลักว่า |จำนวนจริงใด ๆ| ≥ 0 เสมอ

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y + 5 = |2x - 1|\}$

จาก $y + 5 = |2x - 1|$

พิจารณาค่า x จะได้ว่า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น $D_r = R$

จาก $y + 5 = |2x - 1|$ ซึ่ง $|2x - 1| \geq 0$ เสมอ

ดังนั้น $y + 5 \geq 0$

$y \geq -5$

นั่นคือ $R_r = [-5, \infty)$

5. ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์มีสมการอยู่ในรูปที่ติดรากที่เป็นเลขคู่ของจำนวนจริงใด ๆ ให้ใช้หลักว่าจำนวนที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายราก จะต้องเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$

จากสมการ $y = \sqrt{16 - x^2}$

หาค่าโดเมนพิจารณาจาก $16 - x^2 \geq 0$

$$(x - 4)(x + 4) \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

ดังนั้น $D_r = [-4, 4]$

จาก $y = \sqrt{16 - x^2}$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$y^2 = 16 - x^2$$

$$x^2 = 16 - y^2$$

ดังนั้น $16 - y^2 \geq 0$

$$y^2 - 16 \leq 0$$

$$(y - 4)(y + 4) \leq 0$$

จากสมการจะได้ $y \in [-4, 4]$

จากโจทย์เดิม $y \geq 0$

ดังนั้น $R_r = [0, 4]$

นั่นคือ $D_r = [-4, 4]$

$R_r = [0, 4]$

6. ถ้าเงื่อนไขของความสัมพันธ์ไม่สามารถจัดสมการให้ y อยู่ในเทอม x หรือ x อยู่ในเทอม y ได้อย่างง่าย ก็ให้จัดเป็นกำลังสองสมบูรณ์หรือจัดอยู่ในรูปของ $ax^2 + bx + c = 0$

ตัวอย่าง $r = \left\{(x, y) \in R \times R \middle| y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}\right\}$

จากสมการ $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$

จัดสมการใหม่ ; $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1 + 2}$

$$y = \frac{1}{(x-1)^2 + 2}$$

พิจารณาค่า x ซึ่งเป็นตัวส่วนจะได้ว่า ไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ ก็จะได้สมการเป็นจริงตลอด ดังนั้น

$$D_r = R$$

จากสมการ $y = \dfrac{1}{(x-1)^2 + 2}$

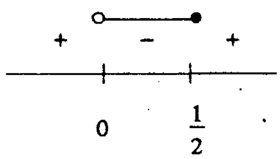
$$(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{y}$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{y} - 2$$

$$(x-1)^2 = \frac{1-2y}{y}$$

ดังนั้น $\dfrac{1-2y}{y} \geq 0$

$\dfrac{2y-1}{y} \leq 0$ เขียนเส้นจำนวน



$$R_r = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

นั่นคือ $D_r = R$

$$R_r = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

โจทย์แบบฝึกหัด

จงหาค่าโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\right\}$

2. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-8}}\right\}$

3. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{1}{x^2-2x-3}\right\}$

4. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, |x| + |y| = 1\right\}$

5. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, 2|x| - 3|y| = 6\right\}$

6. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 3\right\}$

7. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{3}{4-|x|}\right\}$

8. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{-4}{\sqrt{9-|x|}}\right\}$

9. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \sqrt{x^2+16}\right\}$

10. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{3x|x|}{x^2}\right\}$

11. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \sqrt{x^2 - 121}\right\}$

12. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}\right\}$

13. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = x^2 - 2x - 10\right\}$

14. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, x^2 + y^2 = 9\right\}$

15. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0\right\}$

16. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, 9x^2 - 4y^2 = 36\right\}$

17. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, \dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

18. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{10 - 11x}{12x - 5} + \dfrac{1}{2}\right\}$

19. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{3x}{4x - 7} - 2\right\}$

20. $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}\right\}$

กราฟของความสัมพันธ์ r

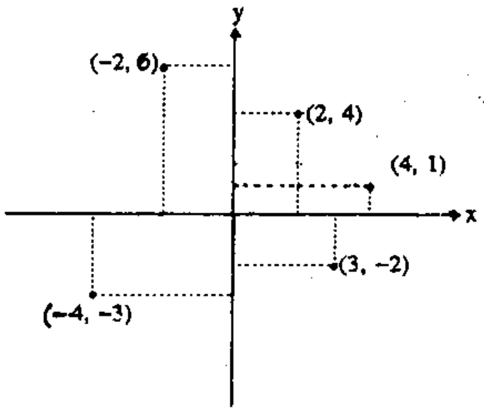
ในการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r ก็คือการนำเอาสมาชิกในความสัมพันธ์ r ไปกำหนดเป็นจุดแต่ละจุดในระนาบนั่นเอง แนวของจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในระนาบของความสัมพันธ์ เราเรียกว่า กราฟของความสัมพันธ์ r

บทนิยาม ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และความสัมพันธ์ $r \subset R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือเซตของจุดในระนาบโดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r

ลักษณะของกราฟที่เกิดขึ้น แบ่งเป็น 3 ลักษณะคือ

1. กราฟจุด ความสัมพันธ์ r จะเป็นเซตของคู่อันดับ ซึ่งแต่ละคู่อันดับจะแทนจุดต่าง ๆ ของความสัมพันธ์ r

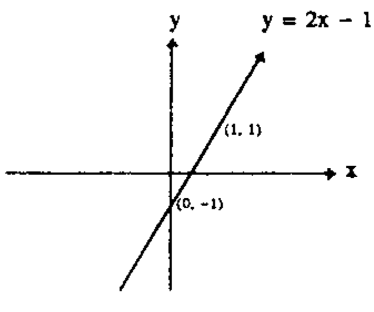
ตัวอย่าง $r = \{(2, 4), (4, 1), (3, -2), (-2, 3), (-4, -3)\}$



2. กราฟเส้น เป็นกราฟที่เงื่อนไขของความสัมพันธ์มีเครื่องหมาย "=" และ $(x, y) \in R \times R$

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r

$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x - \}$



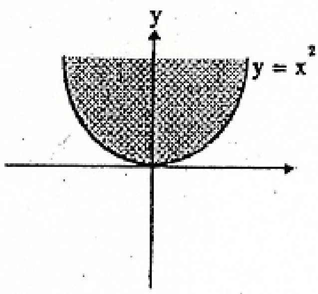
3. กราฟซึ่งกำหนดเป็นพื้นที่ เป็นกราฟที่เงื่อนไขของความสัมพันธ์ มีเครื่องหมายอสมการมาเกี่ยวข้อง เช่น เครื่องหมาย $<, \leq, >, \geq$ การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบนี้มีหลักพอสังเขป ดังนี้

1. ก่อนเขียนกราฟของอสมการต้องเขียนกราฟของสมการก่อน
2. ถ้ามีเครื่องหมาย "=" ในอสมการรวมอยู่ด้วย ส่วนที่เป็นเส้นกราฟของสมการจะเป็นเส้นทึบ แต่ถ้าอสมการไม่มีเครื่องหมาย "=" ส่วนที่เป็นเส้นกราฟจะเป็นเส้นประ
3. ถ้ากราฟของความสัมพันธ์ มีเครื่องหมาย > หรือ < มาเกี่ยวข้องให้พิจารณาพื้นที่ส่วนที่แรเงาว่าอยู่ด้านใดของกราฟ โดยการเลือกจุดที่ทราบมาทดสอบก็จะทราบได้ว่า กราฟจะอยู่ด้านใดและแรเงาตรงส่วนไหน

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r เมื่อกำหนด

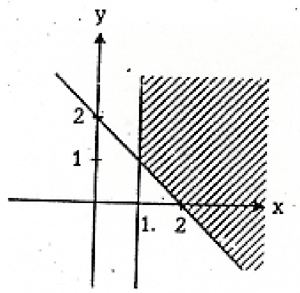
$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq x^2\}$

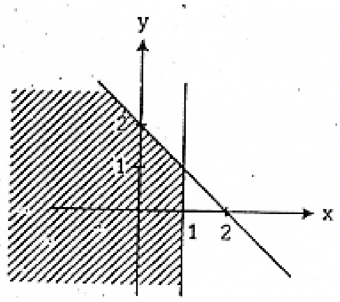
หลักการ
1. เขียนกราฟของ $y = x^2$
2. สุ่มเลือกจุดบนแกน y มาทดสอบ จะได้ว่าสอดคล้องกับอสมการ $y \geq x^2$
3. เขียนกราฟได้ดังรูป

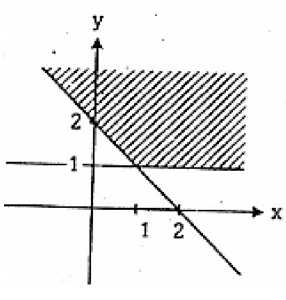


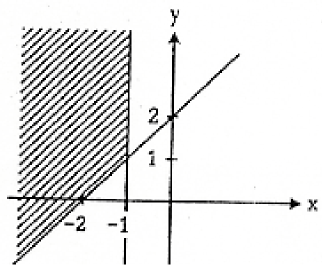
โจทย์ตัวอย่างกราฟของความสัมพันธ์

3. กราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x \geq 1$ และ $x + y \geq 2\}$ ตรงกับรูปในข้อใด

1)


2)


3)


4)


จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. r = $\{(x, y) \in R \times R \mid y \le \sqrt{x}\}$

2. r = $\{(x, y) \in R \times R \mid -3 < x \le 3$ และ $-2 < y \le 5\}$

3. r = $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \le 4\}$

4. r = $\{(x, y) \in R \times R \mid y \le x^2$ และ $x + y \le 3\}$

5. r = $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \le 9$ และ $x^2 - y^2 \ge 1\}$

6. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| \le 2$ และ $|x| - |y| \le 1\}$

7. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \le 1$ และ $x \le |y|\}$

8. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2|x| + 3|y| = 6\}$

9. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid |y| \ge x\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid R \times R \mid |x| \ge y\}$ จงเขียนกราฟของ $r_1 \cap r_2$

10. กำหนดให้ $r = \left\{(x, y) \mid y = \dfrac{\sqrt{3x - 4} + 12}{x^2 - 3x + 2}\right\}$ จงหา D_r และ R_r

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

นิยาม อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว อินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} และ r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A นั่นคือ จะได้ว่า

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x \in B \text{ และ } y \in A\}$$

ข้อสังเกต

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ แล้วจะได้ว่า

$D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

ดังนั้น ถ้าพิจารณาจากกราฟของความสัมพันธ์ r และ r^{-1} แล้วจะได้ว่า กราฟทั้งสองจะสมมาตรกันตามเส้นตรง $y = x$

แบบทดสอบความสัมพันธ์

1. ถ้า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 + ay + b\}$ และคู่อันดับ (8, 3), (5, 2) เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r แล้วคู่อันดับ $(a^2 + b^2, a^2 - b^2)$ เท่ากับคู่อันดับในข้อใด
   1. (29, −21)
   2. (21, 29)
   3. (21, −29)
   4. (36, −21)

---

2. **ข้อใดไม่ถูกต้อง**
   1. ถ้า $(x, 5) = (4, y)$ แล้ว $(x - 2, y + 1) = (2, 6)$
   2. ถ้า $(x + 1, y - 3) = (5, 6)$ แล้ว $x + y = 13$
   3. ถ้า $(x - 1, 3) \neq (4, y + 2)$ แล้ว $x \neq 5$ หรือ $y \neq 1$
   4. ถ้า $(x + y, 1) = (5, y - x)$ แล้ว $(x, y) = (2, 3)$

---

3. กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง
   1. ถ้า $A \times B = A \times C$ แล้ว $B = C$
   2. $A \cup (B \times C) = A \times C$ เมื่อ $A \subset B$
   3. ถ้า $A \times B = B \times A$ แล้ว $A = B$
   4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$

---

4. กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \subset B \subset C$ และ $A \neq B$, $B \neq C$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง
   1. $A \times B \subset B \times C$
   2. $(A \times A) \cup (B \times B) = (B \times B)$
   3. $n(B \times C) < n(C \times B)$
   4. $A \times (B \cap C) = A \times B$

5. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{1, 3, 4\}$

ให้ r เป็นความสัมพันธ์ซึ่ง $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x \geq y + 2\}$

เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

1. $\varnothing$
2. $\{(5, 1)\}$
3. $\{(3, 1), (5, 1)\}$
4. $\{(3, 1), (5, 1), (5, 3)\}$

---

6. กำหนดให้ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5$\}$ ถ้า

ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq 2x - 1\}$ เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

1. $\{(1, 1), (2, 3)\}$
2. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
3. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$
4. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

---

7. กำหนดความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ดังนี้

$r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$r_2 = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x^2 - 1} - 1\right\}$

ถ้า A เป็นโดเมนของ r_1 และ B เป็นเรนจ์ของ r_2 แล้ว $A - B$ คือเซตใดต่อไปนี้

1. $[0, 1] \cup \{-1\}$
2. $\{-1\}$
3. $\{0, 1\}$
4. $\{0, 1\} \cup \{-1\}$

---

8. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid \sqrt{x+1} + |y - 4| = 10\}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ตามลำดับคือข้อใด

1. $D_r = [-1, 99]$, $R_r = [-6, 14]$
2. $D_r = (-1, 99)$, $R_r = (-6, 14)$
3. $D_r = [-1, 99]$, $R_r = (-6, 14)$
4. $D_r = (-1, 99)$, $R_r = [-6, 14]$

9. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{\frac{x-1}{3x+2}}\right\}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์คือข้อใด

1. $D_r = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$, $R_r = (0, \infty)$

2. $D_r = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$, $R_r = R - \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

3. $D_r = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup [1, \infty)$, $R_r = [0, \infty)$

4. $D_r = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup [1, \infty)$, $R_r = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

---

10. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{(x,y) \in R \times R \mid \sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} = 2\right\}$

ถ้า $A = D_r$ และ $B = R_r$ แล้ว $B - A$ คือเซตใดต่อไปนี้

1. $[-3, 1]$
2. $[1, 2]$
3. $[2, 6]$
4. $[-3, 6]$

---

11. กำหนดความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid 16x^2 - y^2 = 4\}$

และความสัมพันธ์ $r_2 = \left\{(x,y) \in R \times R \mid y = \begin{cases} 3-2x, & 0 < x < 2 \\ -x^2, & -2 \le x \le 0 \end{cases}\right\}$

ถ้า A เท่ากับ D_{r_1} และ $B = R_{r_2}$ แล้ว $A' \cap B$ คือเซตในข้อใด

1. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
2. $(-2, 2)$
3. $\left(-4, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$
4. $(-4, -2) \cup (2, 3)$

12. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x|x|\}$ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือข้อใด

1. $r^{-1} = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}\right\}$

2. $r^{-1} = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}\right\}$

3. $r^{-1} = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \begin{cases} -\sqrt{x} & , x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}\right\}$

4. $r^{-1} = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \begin{cases} -\sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}\right\}$

---

13. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - 4x + y - 5 = 0\}$
จงหาว่า $D_{r^{-1}}$ สอดคล้องกับสมการในข้อใด

1. $x^2 - 81 \geq 0$
2. $|x - 4| > 5$
3. $(x - 9)(x - 15)(x - 10) \leq 0$
4. $x^2 + 10x + 16 > 0$

---

14. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 8$ และ $-8 < x < -7\}$ มี $D_{r^{-1}}$ ตรงกับข้อใด

1. $\{x \mid -8 \leq x < 41\}$
2. $\{x \mid x \geq 2\sqrt{2}\}$
3. $\{x \mid 41 < x < 56\}$
4. $\{x \mid -8 \leq x < 56\}$

---

15. กำหนด $r = \left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, y = \dfrac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\right\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $D_r \cap R_r = [1, 2)$
2. $D_r \cup R_r = [1, \infty)$
3. $D_r - R_r = [-2, 1)$
4. $R_r - D_r = (2, \infty)$

16. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq x^2 \text{ และ } y \leq 2 - x\}$

$D_r = [-2, 1]$ และ $R_r = [0, 4]$

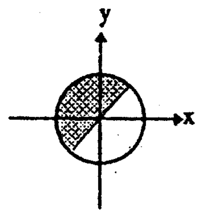
ข. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-5} + 1\}$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 2x + 6\}$

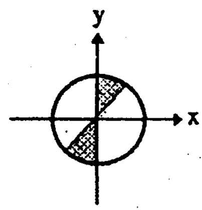
1. ถูกเฉพาะข้อ ก.
2. ถูกเฉพาะข้อ ข.
3. ถูกทั้ง 2 ข้อ
4. ผิดทั้ง 2 ข้อ

17. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 \leq 2 - x^2\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq \sqrt{x^2}\}$ ดังนั้น $r_1 \cap r_2$ คือส่วนที่แรเงาในข้อใด

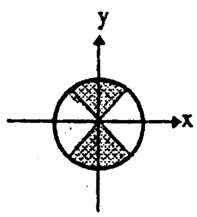
1.



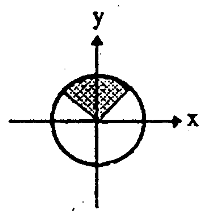
2.



3.



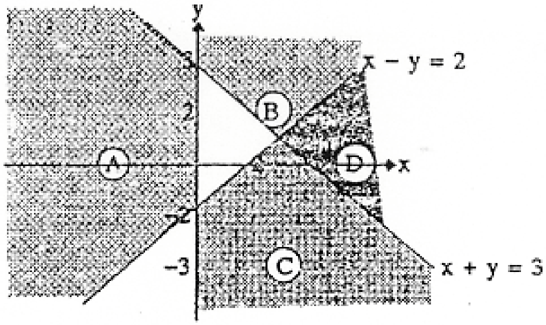
4.



18. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = (1 - x)^2, x \geq 1\}$ กราฟของความสัมพันธ์ r เหมือนกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใด

1. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = |y| - 1\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = |y| + 1\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| - 1\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |y| = |x| + 1\}$

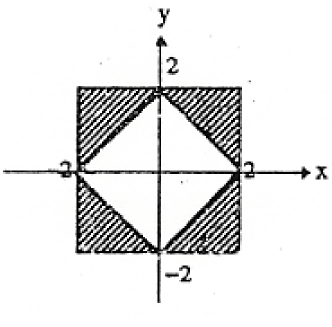
22. จงพิจารณากราฟต่อไปนี้



ข้อใดถูกต้อง

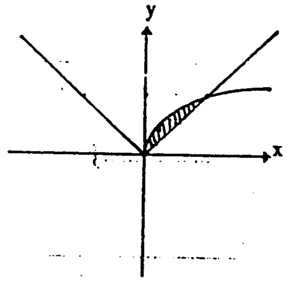
1. อาณาบริเวณ A คือกราฟของ $\{(x, y) \in R \times R \mid x + y \leq 3$ และ $x - y \geq 2$ และ $x \leq 0\}$
2. อาณาบริเวณ B คือกราฟของ $\{(x, y) \in R \times R \mid x + y \geq 3$ และ $x - y \leq 2$ และ $x \geq 0\}$
3. อาณาบริเวณ C คือกราฟของ $\{(x, y) \in R \times R \mid x + y \leq 3$ และ $x - y \leq 2$ และ $y \leq 0\}$
4. อาณาบริเวณ D คือกราฟของ $\{(x, y) \in R \times R \mid x + y \geq 3$ และ $x - y \geq 2$ และ $y \leq 0\}$

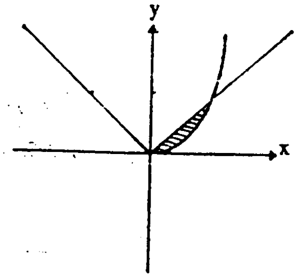
23. จากกราฟที่กำหนดให้ส่วนที่แรเงาเป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใด

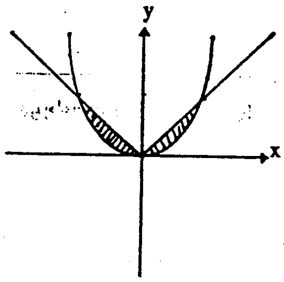


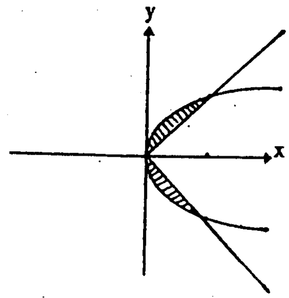
1. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| \leq 2$ และ $|y| \leq 2\} - \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| < 2\}$
2. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| \leq 2$ และ $|y| \leq 2\} - \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| > 2\}$
3. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| \geq 2$ และ $|y| \geq 2\} - \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| < 2\}$
4. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| \geq 2$ และ $|y| \geq 2\} - \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| > 2\}$

24. กำหนด $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq |x|\}$; $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \leq \sqrt{x}\}$
กราฟของ $r_1 \cap r_2$ คือกราฟในข้อใด

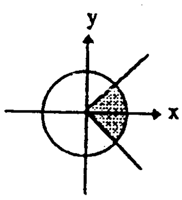
1.


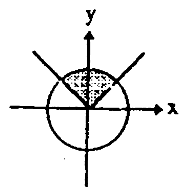
2.


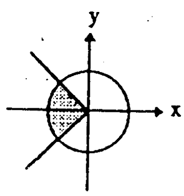
3.


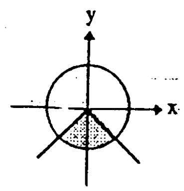
4.


25. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq \sqrt{x^2}$ และ $x^2 + y^2 \leq 1\}$
กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r คือข้อใด

1.


2.


3.


4.


เฉลยคำตอบแบบทดสอบ

1. 1	2. 3	3. 4	4. 3	5. 4	6. 4	7. 2	8. 1	9. 4	10. 1
11. 1	12. 2	13. 3	14. 3	15. 1	16. 1	17. 4	18. 2	19. 2	20. 3
21. 1	22. 2	23. 1	24. 1	25. 1					

FUNCTIONS

บทนิยาม ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

จากบทนิยามกล่าวได้ว่า "ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$"

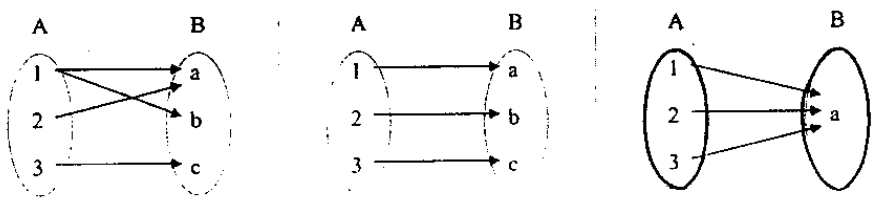
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ a, b และ c ไม่มีคู่ใดเท่ากัน และ

$r = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, c)\}$ จะได้______________________

$s = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ จะได้______________________

$t = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ จะได้______________________

เราอาจเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของโดเมนกับสมาชิกของเรนจ์ของ r, s และ t ได้ดังนี้



r — แบบ one to many

s — แบบ one to one

t — แบบ many to one

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงเป็นฟังก์ชันหรือไม่

ก) เมื่อความสัมพันธ์อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ข) เมื่อความสัมพันธ์อยู่ในรูปแผนภาพแสดงการจับคู่

ค) เมื่อความสัมพันธ์อยู่ในรูปแบบบอกเงื่อนไข

จากบทนิยามของฟังก์ชัน กล่าวได้ว่า

ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

เราอาจเขียนนิยามของฟังก์ชันใหม่ดังนี้

f เป็นฟังก์ชัน $\Leftrightarrow \forall x_1 \in D_f \ \forall x_2 \in D_f [x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)]$

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจใช้วิธีการดังนี้

วิธีที่ 1 จาก $(x, y) \in r$ เขียน y ในรูปของ x แล้วพิจารณาค่า y
ถ้าแต่ละค่าของ x จะหา y ได้เพียงค่าเดียว สรุปได้ว่า r เป็นฟังก์ชัน
แต่ถ้ามีบางค่าของ x ที่ทำให้หา y ได้หลายค่า สรุปได้ว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

$\boxed{\text{วิธีที่ 2}}$ จาก $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ เขียน y และ z ในรูปของ x

ถ้าสรุปได้ว่า y และ z ต้องเท่ากันเสมอ แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน

ถ้ามีกรณีที่ y และ z ไม่เท่ากันได้ แสดงว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

✪ สำหรับการสรุปว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ไม่เป็นฟังก์ชัน นอกจาก 2 วิธีเสนอข้างต้นแล้ว อาจใช้วิธียกตัวอย่างว่า "มีคู่อันดับในความสัมพันธ์ 2 คู่ที่มีสมาชิกตัวหน้าเป็นตัวเดียวกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันก็ได้"

ง) เมื่อความสัมพันธ์อยู่ในรูปกราฟ

พิจารณาจากกราฟของความสัมพันธ์โดยลากเส้นขนานกับแกน y ถ้าไม่มีเส้นขนานกับแกน y เส้นใดตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้มากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน

แต่ถ้ามีเส้นขนานกับแกน y แม้เพียงเส้นเดียวตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุดแล้ว ความสัมพันธ์นั้นจะไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เงื่อนไขของ r คือ $x^2 + y^2 = 1$

เขียน y ในรูปของ x จะได้ $y^2 = 1 - x^2$

$y = \sqrt{1-x^2}$ หรือ $y = -\sqrt{1-x^2}$

จะพบว่า มีค่า x บางค่าที่ทำให้หาค่า y ได้สองค่า เช่น ถ้า $x = 0$ แล้ว

จะได้ $y = 1$ หรือ $y = -1$

แสดงว่า $(0, 1) \in r$ และ $(0, -1) \in r$

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid x^2 + y^2 = 1\}$ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เงื่อนไขของ r คือ $x^2 + y^2 = 1$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขเดียวกับของ r ในตัวอย่างที่ 6 แต่ขอให้สังเกตที่กำหนดว่า $(x, y) \in R \times R^+$ แสดงว่า x เป็นจำนวนจริง และ y เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น ถ้านำเงื่อนไขของ r มาเขียน y ในรูปของ x จะเขียนได้ดังนี้

$y^2 = 1 - x^2$

$y = \sqrt{1-x^2}$

แสดงว่า แต่ละค่าของ x จะได้ค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้น r จึงเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 3x - 2y \geq 1\}$ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เงื่อนไขของ r คือ $3x - 2y \geq 1$

เขียน y ในรูปของ x จะได้ $y \leq \frac{1}{2}(3x - 1)$

จะพบว่า ถ้า $x = 1$ แล้ว $y \leq 1$

แสดงว่า หาค่า y ได้มากกว่าหนึ่งค่า เช่น $y = 1$ หรือ $y = 0$ เป็นต้น

ดังนั้น $(1, 1) \in r$ และ $(1, 0) \in r$ เพราะฉะนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ ให้ $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ ดังนั้น

$$|x| - |y| = 1 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$|x| - |z| = 1 \qquad \text{.....................(2)}$$

ดังนั้น $|x| - |y| = |x| - |z|$

นั่นคือ $|y| = |z|$ ....(3)

จาก (3) จะได้ว่า $y = z$ หรือ $y = -z$

แสดงว่า y และ z ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน $(y = -z)$

เพราะฉะนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 2 = 0\}$

(1) จงแสดงว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

(2) จงหาความสัมพันธ์จำนวน 2 เซต ซึ่งเป็นสับเซตของ r และฟังก์ชัน

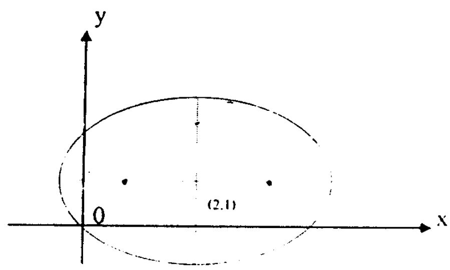
วิธีทำ (1) วิเคราะห์กราฟของ r จากสมการ

$$x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 2 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 - 2y + 1) = 2 + 4 + 3$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

แสดงว่า กราฟของ r เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 1) มีกราฟดังรูป



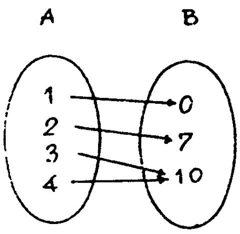
จากกราฟของ r จะพบว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

(2) ความสัมพันธ์ที่เป็นสับเซตของ r และเป็นฟังก์ชัน ได้แก่

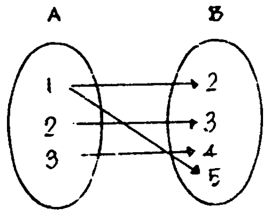
$$r_1 = \{(x, y) \in R \times R^- \mid x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 2 = 0\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y \geq 1 \text{ และ } x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 2 = 0\}$$

กราฟของ r_1 และ r_2 มีลักษณะดังรูป ดังนั้น r_1 และ r_2 เป็นสับเซตของ r และเป็นฟังก์ชันทั้งคู่



(ก) กราฟของ r_1



(ข) กราฟของ r_2

ตัวอย่างที่ 7 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

___1. $r_1 = \{(1,0),(2,7),(3,10),(4,10)\}$

___2. $r_2 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,5)\}$

___3. $r_3 = \left\{(x,y) \middle| y = \sqrt{x}\right\}$

___4. $r_4 = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x-2\}$ เมื่อ $A = \{-2,-1,0,1,2\}$

___5. $r_5 = \{(x,y) \in A \times B \mid y < x\}$ เมื่อ $A = \{0,1\},\ B = \{-1,1\}$

___6. $r_6 = \left\{ (x,y) \middle| y = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } x \geq 0 \\ -1 \text{ เมื่อ } x \leq 0 \end{cases} \right\}$

___7. $r_7 = \{(x,y) \mid y = x^2 - 1\}$

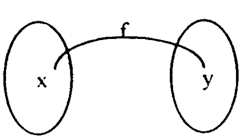
___8. $r_8 = \{(x,y) \mid |y| = x+1\}$

___9. $r_9 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 5,\ x < 0$ และ $y > 0\}$

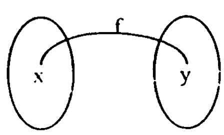
ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน เราสามารถเขียน $y = f(x)$ แทน $(x,y) \in f$ ได้

1) เรียก $f(x)$ ว่า "ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x" ; $f(x)$ อ่านว่า "เอฟที่เอ็กซ์ หรือ เอฟเอ็กซ์"



$= f(x)$



$= f(x) = x^2 - 4x + 5$

2) เรียก y ว่า "เป็น image ของ x ภายใต้ f"

3) เรียก x ว่า "เป็น pre – image ของ y ภายใต้ f" $f = \{(x,y) \mid y = x^2 - 4x + 5\}$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **จงหาค่าของ**

2.1) $f(0)$ = ... 2.2) $f(-1)$ = ...

2.3) $f(3)$ = ... 2.4) $f(a)$ = ...

2.5) $f(x + h)$ = ...

2.6) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = ...

= ....

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } x < 1 \\ x \text{ เมื่อ } 1 \le x \le 3 \\ -2 \text{ เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ

3.1) $g(-2)$ = ... 3.2) $g(0)$ = ...

3.3) $g(1)$ = ... 3.4) $g(\sqrt{3})$ = ...

3.5) $g(9)$ = ... 3.6) $g(3 + h)$ = ...

3.7) $\frac{g(3+h)-g(3)}{h}$ เมื่อ $h > 0$ = ...

= ....

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า $f(2x + 1) = \frac{x+2}{3}$

4.1) จงหา $f(x)$

4.2) จงหา $f(0)$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x-1}$ จงเขียน $f(4x)$ ในรูปของ $f(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x}{x-1}$

เขียน x ในเทอมของ $f(x)$ จะได้

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $f(1) = 2$ และ $f(x+1) = 1 + \frac{2}{f(x)}$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวก

จงหาค่าของ $f(4)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $f(x) = 4^x$ จงหาค่าของ $f(x+1) - f(x)$ ในเทอมของ $f(x)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $f(n) = f(n-1) + 2n - 1$ ทุกค่าของ $n > 1$

จงหาค่าของ $f(2n)$

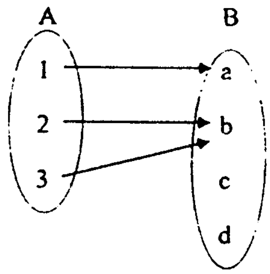
วิธีทำ

ฟังก์ชันจากเซตหนึ่งไปยังอีกเซตหนึ่ง

(1) ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B)

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

* f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$



จาก $f = \{(1, 2), (2, b), (3, b)\}$

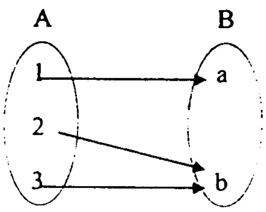
มี $D_f = \{1, 2, 3\} = A$ และ $R_f = \{a, b\} \subset B$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

(2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี $D_f = A$ และ $R_f = B$

* f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$



จาก $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

มี $D_f = \{1, 2, 3\} = A$ และ $R_f = \{a, b\} = B$

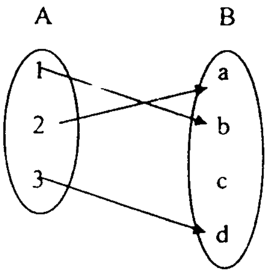
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

(3) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ แล้ว มี $x \in D_f$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $(x, y) \in f$

* f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

f เป็น 1-1 function $\Longleftrightarrow [(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \longrightarrow x_1 = x_2]$



จาก $f = \{(1, b), (2, a), (3, d)\}$

จะเห็นว่า ไม่มีคู่อันดับใดเลยที่มีสมาชิกตัวหลังซ้ำกัน

ดังนั้น f เป็น 1-1 ฟังก์ชัน

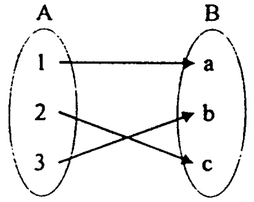
f is 1-1 function $\Leftrightarrow \forall x_1 \in D_f \forall x_2 \in D_f [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$

(4) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one-to-one function from A onto B)
หรือการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซต A และเซต B (one-to-one correspondence)

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f = B$

* A สมนัย 1–1 กับ B (A ~ B) หมายความว่า "มีฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไปทั่วถึง B"



$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชัน 1–1 จาก {1, 2, 3} ไปทั่วถึง {a, b}

หมายเหตุ ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ข้อสังเกตดังนี้

(1) ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว $n(A) = n(B)$

(2) ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B แล้ว $n(A) \leq n(B)$

(3) ถ้า $n(A) > n(B)$ แล้ว ไม่สามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ได้

ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) และฟังก์ชันลด (decreasing function)

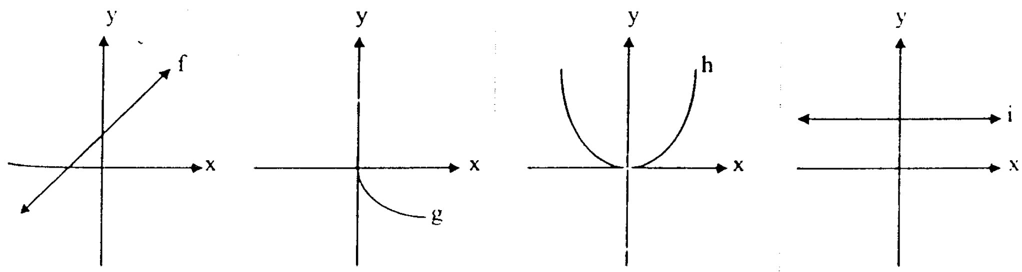
บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R และ $A \subset D_f$

1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A

ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

2) f เป็นฟังก์ชันลดใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A

ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน R | g เป็นฟังก์ชันลดใน $R^+ \cup \{0\}$ | h เป็นฟังก์ชันลดใน $(-\infty, 0]$ h เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน $[0, \infty)$ | i ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่ม และไม่ใช่ฟังก์ชันลด

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ฟังก์ชันใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

2) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

3) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น เราเพียงแต่ตรวจสอบดูว่าโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B

(1) จากเงื่อนไขของ f ที่ว่า $y = 2x$ เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ จะได้ว่า

ดังนั้น f = ...

D_f = ...

เพราะฉะนั้น f ....

(2) จากเงื่อนไขของ g ที่ว่า $y = x^2$ เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ จะได้ว่า

g = ...

ดังนั้น D_g = ...

เพราะฉะนั้น g ....

(3) จากเงื่อนไขของ h ที่ว่า $y = x + 2$ เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ จะได้ว่า

h = ...

ดังนั้น D_h = ...

R_f = ...

เพราะฉะนั้น h ....

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

$B = \{y \in I \mid y \geq 2\}$

และ $f = \{(x, y) \in I \times B \mid y = |x| + 2\}$

จงตรวจสอบดูว่า f เป็นฟังก์ชันจาก I ไป B หรือไม่

วิธีทำ (1) ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันของ f

จากเงื่อนไข $y = |x| + 2$

จะได้ว่า แต่ละค่า $x \in I$ จะให้ค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

(2) ตรวจสอบโดเมนของ f

พิจารณาจากเงื่อนไข $y = |x| + 2$

เพราะว่า ถ้า $x \in I$ แล้ว $|x| \in I$ และ $|x| \geq 0$

ดังนั้น $|x| + 2 \in I$ และ $|x| + 2 \geq 2$

แสดงว่า $y \in I$ และ $y \geq 2$

นั่นคือ $y \in B$

เพราะฉะนั้น $D_f = I$

(3) ตรวจสอบเรนจ์ของ f

จากเงื่อนไข $y = |x| + 2$ จะได้ว่า

$$|x| = y - 2$$

เนื่องจาก $|x| \geq 0$ ดังนั้น จากสมการนี้จะได้ว่า ค่าของ x จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ

$y \in I$ และ $y - 2 \geq 0$

นั่นคือ $y \in I$ และ $y \geq 2$

แสดงว่า $R_f = B$ $(R_f \subset B)$

สรุปจากข้อ (1), (2) และ (3) ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก I ไป B

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \dfrac{\sqrt{144 - 9x^2}}{4} \right\}$

(2) $g = \{ (x, y) \in R \times R \mid y^3 = x^2 - 1 \}$

(3) $h = \{ (x, y) \in R \times R \mid |x + 1|y = 2 \}$

จงหาเซต A ซึ่ง $A \subset R$ และทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

วิธีทำ เซต A ที่ต้องการ คือ โดเมนของฟังก์ชันที่กำหนดให้

(1) จากสมการ $y = \dfrac{\sqrt{144 - 9x^2}}{4}$

จะได้ว่า จำนวนจริง x ที่ทำให้หาค่า y ได้ จะต้องสอดคล้องกับอสมการ

$$144 - 9x^2 \geq 0$$

นั่นคือ $9x^2 - 144 \leq 0$

$$(3x - 12)(3x + 12) \leq 0$$

ดังนั้น $-4 \leq x \leq 4$

แสดงว่า $A = D_f = [-4, 4]$

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดฟังก์ชัน f ดังต่อไปนี้

$$f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = 5 + \sqrt{16 - x^2} \right\}$$

จงหาเซต A และ B ซึ่งทำให้ $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ

$D_f = A$ และ $R_f = B$

หาเซต A จากสมการ $y = 5 + \sqrt{16 - x^2}$

จะสามารถหาค่า y ได้ก็ต่อเมื่อ $16 - x^2 \geq 0$

$$x^2 - 16 \leq 0$$

$$(x - 4)(x + 4) \leq 0$$

ดังนั้น $-4 \leq x \leq 4$

แสดงว่า $A = D_f = [-4, 4]$

หาเซต B ถ้า $x \in [-4, 4]$ แล้ว $0 \leq 16 - x^2 \leq 16$

ดังนั้น $0 \leq \sqrt{16 - x^2} \leq 4$

ดังนั้น $5 \leq 5 + \sqrt{16 - x^2} \leq 9$

นั่นคือ $5 \leq y \leq 9$

เพราะฉะนั้น $B = R_f = [5, 9]$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน จาก [4, 4] ไปทั่วถึง [5, 9]

จากความรู้เรื่องตรรกศาสตร์ $P \longrightarrow Q$ สมมูลกับ $\sim Q \longrightarrow \sim P$ ดังนั้น ข้อความ

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

จะสมมูลกับข้อความ

ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

ดังนั้น จึงอาจกล่าวได้ว่า

> f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ x_1, x_2 ในโดเมน
>
> ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

การแสดงให้เห็นว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ด้วยวิธีนี้จะเลือกใช้ข้อความใดช่วยในการพิสูจน์ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของเงื่อนไขของฟังก์ชันนั้น

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in R \times R \mid 4x + 3y - 5 = 0\}$
จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีทำ ให้ $x_1, x_2 \in D_f$ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y^2 + 2y - 8x + 9 = 0\}$
f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

วิธีทำ ข้อสังเกตสำหรับตัวอย่างนี้ คือ เอกภพสัมพัทธ์ของ y คือ R^+

พิจารณากราฟของสมการ $y^2 + 2y - 8x + 9 = 0$

จะได้ $y^2 + 2y + 1 = 8x - 8$

$(y + 1)^2 = 8(x - 1)$ .... (1)

กราฟของสมการ (1) เป็นรูปพาราโบลาเปิดด้านขวามือมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(1, -1)$
ดังนั้นกราฟของ f จึงเป็นส่วนหนึ่งของพาราโบลานี้ เฉพาะส่วนที่มี $y > 0$ เท่านั้น

จากกราฟของ f จะได้ว่า
f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 21 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4x + 6$ เมื่อ $x \in R$ และกำหนดให้

$A = (-\infty, 2]$, $B = [2, \infty)$ และ $C = [0, 3]$

(1) จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันลดใน A

(2) จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน B

(3) จงแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน C และไม่เป็นฟังก์ชันลดใน C

วิธีทำ เขียน f(x) ใหม่ ดังนี้

$f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2$

$f(x) = (x - 2)^2 + 2$

(1) $A = (-\infty, 2]$

ให้ $x_1 \in A$ และ $x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 < x_2$

เนื่องจาก $x_1 < x_2$

____

____

____

____

นั่นคือ $f(x_1) > f(x_2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชั่นลดใน A

(2) $B = [2, \infty)$

ให้ $x_1 \in B$ และ $x_2 \in B$ โดยที่ $x_1 < x_2$

เนื่องจาก $x_1 < x_2$

$x_1 - 2 < x_2 - 2$

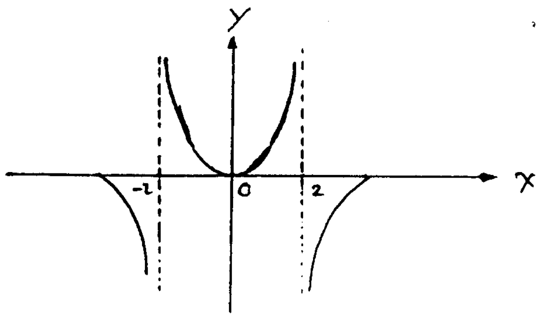
ดังนั้น $(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$

$(x_1 - 2)^2 + 2 < (x_2 - 2)^2 + 2$

นั่นคือ $f(x_1) < f(x_2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน B

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดฟังก์ชั่น f ซึ่งมีกราฟดังรูปต่อไปนี้



ข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด

___(1) f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน R^+ ___(2) f เป็นฟังก์ชั่นลดใน R^-

___(3) f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน $[0, 2)$ ___(4) f เป็นฟังก์ชั่นลดใน $[-1, 0]$

___(5) f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน $[3, \infty)$ ___(6) f เป็นฟังก์ชั่นลดใน $(-\infty, -2)$

___(7) f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน $(-1, 1)$ ___(8) f เป็นฟังก์ชั่นลดใน $(-3, -2) \cup$

___(9) f เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มใน $(1, 2) \cup (2, 3)$

___(10) f ไม่เป็นฟังก์ชั่นเพิ่มและไม่เป็นฟังก์ชั่นลดใน $R - \{-2, 2\}$

ตัวอย่างฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

1) **ฟังก์ชันเชิงเส้น** (linear function) **คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป**

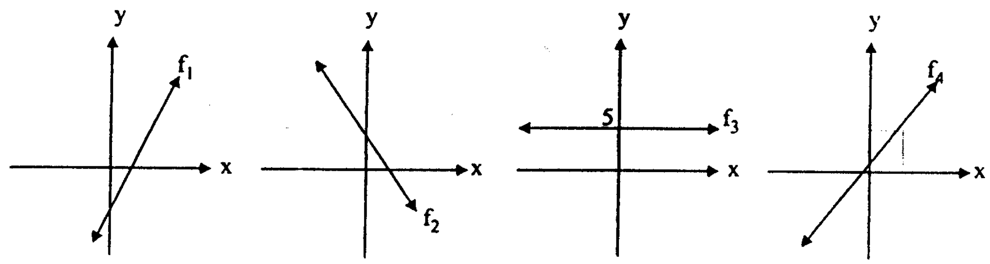
$f(x) = ax+b$ **เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง**

เช่น $f_1(x) = 2x - 3 \longrightarrow f_1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$f_2(x) = -x + 1 \longrightarrow f_2$ เป็นฟังก์ชันลด

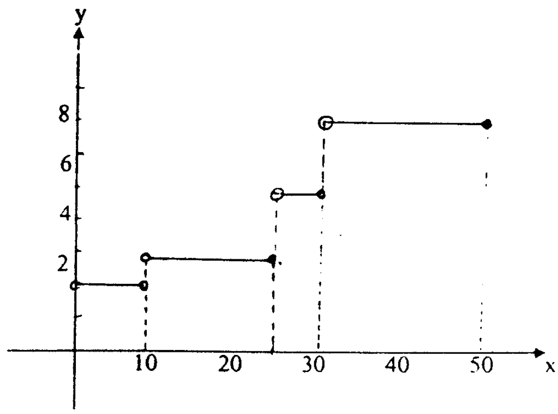
$f_3(x) = 5 \longrightarrow f_3$ เป็นฟังก์ชันคงตัว(constant function)

$f_4(x) = x \longrightarrow f_4$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์(identity function)



2) **ฟังก์ชันขั้นบันได** (step function) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ R และมีค่าฟังก์ชันคงตัวเป็นช่วง ๆ มากกว่า 2 ช่วง กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปคล้ายขั้นบันได

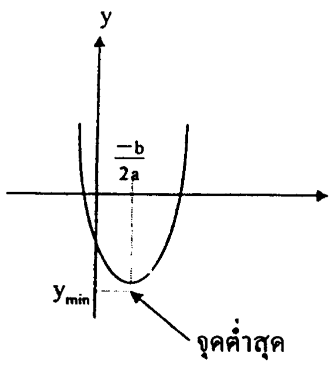
เช่น $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } 0 < x \le 10 \\ 3 & \text{เมื่อ } 10 < x \le 25 \\ 5 & \text{เมื่อ } 25 < x \le 30 \\ 8 & \text{เมื่อ } 30 < x \le 50 \end{cases}$



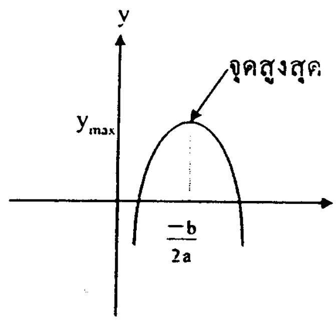
3) **ฟังก์ชั่นกำลังสอง** (quadratic function) **คือ ฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูป**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{เมื่อ } a, b, c \in R \ \text{ และ } \ a \neq 0$$

กราฟของฟังก์ชันนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ a, b, c โดยเฉพาะค่า a



เมื่อ $a > 0$



เมื่อ $a < 0$

4) **ฟังก์ชั่นพหุนาม** (polynomial function) **คือ ฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูป**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ **เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์**

เช่น $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + 3$

$g(x) = x^3 - 1$

★ ฟังก์ชั่นพหุนามจะต้องมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัด

5) **ฟังก์ชั่นตรรกยะ** (rational function) **คือ ฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูป**

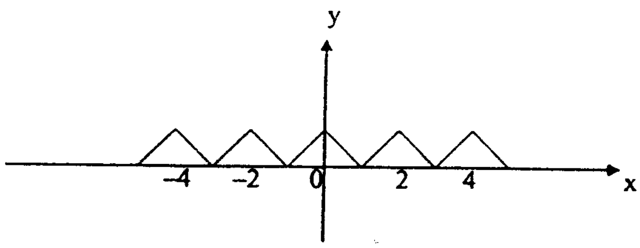
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชั่นพหุนาม}$$

6) **ฟังก์ชั่นที่เป็นคาบ (periodic function)**

ฟังก์ชั่น f ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชั่นคงตัว จะเป็นฟังก์ชั่นที่เป็นคาบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง p ซึ่ง

$f(x + p) = f(x)$ **สำหรับทุกค่าของ x และ x + p ซึ่งอยู่ในโดเมนของ f**

ตัวอย่างฟังก์ชั่นที่เป็นคาบ



7) **ฟังก์ชั่นคู่และฟังก์ชั่นคี่ (even function and odd function)**

นิยาม : กำหนด $f : R \longrightarrow R$

1) เราจะเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชั่นคู่ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$

2) เราจะเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชั่นคี่ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = -f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$

ตัวอย่าง (ก) $f(x) = x^2$ จะเป็นฟังก์ชั่นคู่

เพราะว่า $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

ดังนั้น $f(-x) = f(x) = x^2$

(ข) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ เป็นฟังก์ชั่นคี่

เพราะว่า $f(-x) = \sqrt[3]{-\xi} = -\sqrt[3]{x}$

และ $-f(x) = -\sqrt[3]{x}$

ดังนั้น $f(-x) = -f(x) = -\sqrt[3]{x}$

ตัวอย่างที่ 23 บริษัทแห่งหนึ่งผลิตเสื้อ ถ้าขายตัวละ 40 บาท ขายได้ 4000 ตัว ถ้าขายตัวละ 30 บาท ขายได้ 8000 ตัว จงสร้างฟังก์ชัน f เมื่อ f(x) เป็นจำนวนเสื้อที่ขายได้ และ x เป็นราคาเสื้อ(บาท) ต่อตัว โดยที่ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

วิธีคิด $f = \{(x, y) \mid y = f(x) = \text{........................}\}$

วิธีทำ ให้ x แทนราคาเสื้อ(บาท)ต่อตัว

y แทนจำนวนเสื้อที่ขายได้

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจะได้ว่า $f(x) = ax + b$

จะต้องหาค่า a และ b

ถ้า $x = 40$, $y = 4000$ จะได้ __________________________

ถ้า $x = 30$, $y = 8000$ จะได้ __________________________

แก้ระบบสมการจะได้

ตัวอย่างที่ 24 กำหนด $h(x) = 2 - x^2$ เมื่อ $x \in (-1, 2]$ จงหาเรนจ์ของ h

วิธีทำ จาก $h(x) = 2 - x^2$ เมื่อ $x \in (-1, 2]$ เขียนกราฟของ h ได้ดังรูป

จากกราฟจะได้ว่า

เรนจ์ของ h = ______________

ตัวอย่างที่ 25 **เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใด ๆ หน่วยเป็นวินาที ระยะความสูงของก้อนหินจากพื้นหน่วยเป็นเมตร เป็นไปตามสมการ** $h(t) = 20t - 5t^2$ **เมื่อ** $0 \le t \le 4$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก) เมื่อใดก้อนหินจะอยู่สูงจากพื้น 15 เมตร

ข) วินาทีที่ 2 ก้อนหินสูงจากพื้นดินกี่เมตร

ค) เมื่อใดก้อนหินเคลื่อนที่ไปได้สูงสุด และเคลื่อนที่ไปได้สูงสุดกี่เมตร

ตัวอย่างที่ 26 จงวาดกราฟของฟังก์ชั่น $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$

วิธีทำ เขียนฟังก์ชั่นใหม่ดังนี้

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x+2)}$$

ดังนั้น $D_f = R - \{-2, -3\}$

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{เมื่อ } x \neq -3 \text{ และ } x \neq -2$$

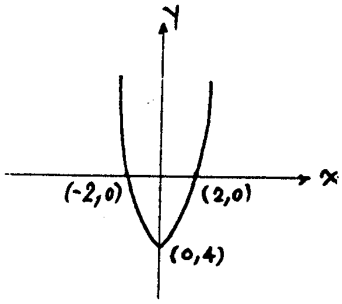
กราฟของ f จะเป็นรูปไฮเพอร์โบลาแบบมุมฉาก ที่มีสมการ $(x + 2)y = 1$ ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-2, 0)$ ยกเว้นจุด $(-3, -1)$ ดังรูป

ตัวอย่างที่ 27 จงวาดกราฟของฟังก์ชั่น $f(x) = |x^2 - 4|$

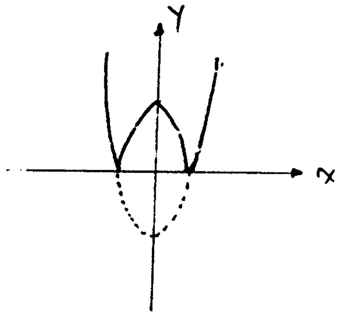
วิธีทำ สมมติให้ $g(x) = x^2 - 4$

กราฟของ g เป็นรูปพาราโบลา ที่มีลักษณะดังรูป (ก)

ดังนั้น กราฟของ f จะมีลักษณะดังรูป (ข)



(ก) กราฟของ g



(ข) กราฟของ f

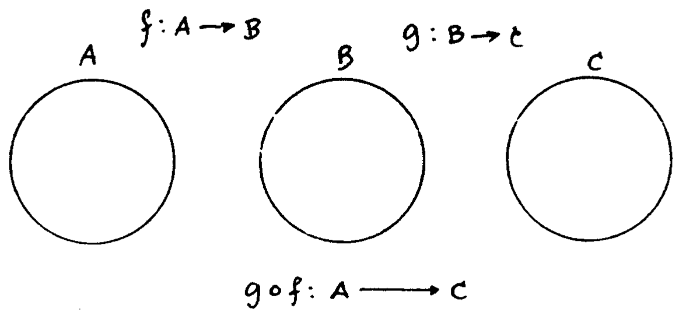
ฟังก์ชั่นคอมโพสิท (Composite Function)

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชั่น และ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

ฟังก์ชั่นคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof และ

กำหนดโดย $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่ง $f(x) \in R_f \cap D_g$

กำหนดฟังก์ชั่น $f : D_f \rightarrow R_f$ และ $g : D_g \rightarrow R_g$ โดยที่ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$



หมายเหตุ : 1) ถ้า $R_f \subset D_g$ แล้ว $D_{gof} = D_f$

2) **ขั้นตอนการหา D_{gof}**

2.1 หา R_f และ D_g

2.2 หา $R_f \cap D_g$

2.3 หาเซตของ x ซึ่ง $f(x) \in R_f \cap D_g$

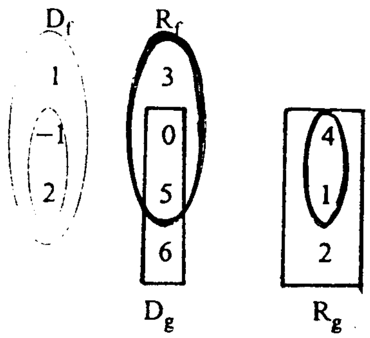
เซตที่ได้คือ D_{gof}

ตัวอย่างที่ 28 กำหนด $f = \{(-1, 0), (1, 3), (2, 5)\}$

$g = \{(0, 4), (5, 1), (6, 2)\}$

จงหา gof

วิธีทำ



จากโจทย์ $R_f = \{0, 3, 5\}$

$D_g = \{0, 5, 6\}$

จะได้ $R_f \cap D_g = \{0, 5\} \neq \varnothing$

แสดงว่ามี gof เกิดขึ้น

และ โดเมนของ gof = ______________________________

(gof)(−1) = ______________________________

(gof)(2) = ______________________________

นั่นคือ gof = ______________________________

$(gof)^{-1}$ = ______________________________

ตัวอย่างที่ 29 กำหนดให้ $f(x) = -x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x-1}$ ถ้ามีจงหา

วิธีทำ (1) gof (2) fog

(1) เนื่องจาก $R_f = (-\infty, -1]$ และ $D_g = [1, \infty)$

ดังนั้น $R_f \cap D_g = (-\infty, -1] \cap [1, \infty) = \varnothing$

แสดงว่า ______________________________

(2) เนื่องจาก $R_g = [0, \infty)$ และ $D_f = R$

ดังนั้น $R_g \subset D_f$ แสดงว่าหา fog ได้ และ

$$D_{fog} = D_g = [1, \infty)$$

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{x-1}\right) = -\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 1 \\ &= -x \text{ เมื่อ } x \in D_g = [1, \infty)\end{aligned}$$

ดังนั้น $fog = \{(x, y) \mid y = -x \text{ และ } x \in [1, \infty)\}$

ตัวอย่างที่ 30 กำหนดฟังก์ชั่น $f(x) = 2x + 3$ เมื่อ $x \in [-2, 1]$

$g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

จงหา (1) D_{gof} (2) $gof(x)$

วิธีทำ 1. หา D_{gof}

จาก $f(x) = 2x + 3$ เมื่อ $x \in [-2, 1]$

จะได้ $-2 \leq x \leq 1$

ดังนั้น $-1 \leq 2x + 3 \leq 5$

แสดงว่า $-1 \leq f(x) \leq 5$

ดังนั้น $R_f = [-1, 5]$

จาก $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ จะได้

$$D_g = \{x \in R \mid 4 - x^2 \geq 0\}$$
$$= \{x \in R \mid x^2 - 4 \leq 0\}$$
$$= \{x \in R \mid (x - 2)(x + 2) \leq 0\}$$

ดังนั้น $D_g = [-2, 2]$

ดังนั้น $R_f \cap D_g = [-1, 5] \cap [-2, 2] = [-1, 2]$

ต้องการให้ $f(x) \in R_f \cap D_g$

$2x + 3 \in [-1, 2] \rightarrow$ ____________________

____

____

2. $(gof)(x) = g(f(x))$

$$= g(2x + 3)$$
$$= \sqrt{4 - (2x + 3)^2}$$
$$= \sqrt{-4x^2 - 12x - 5} \text{ เมื่อ } x \in \left[-2, -\tfrac{1}{2}\right]$$

หมายเหตุ การหาโดเมนของ gof ต้องหาจาก D_{gof} ไม่ใช่มาหาจาก

$$(gof)(x) = \sqrt{-4x^2 - 12x - 5}$$

เพราะจะทำให้โดเมนของ gof ไม่ตรงกับความเป็นจริง (มีส่วนเกินเนื่องจากเราจำกัดโดเมนของ f)

$$gof = \left\{(x, y) \mid y = \sqrt{-4x^2 - 12x - 5}\right\} \text{ เมื่อ } D_{gof} = \left[-2, -\tfrac{1}{2}\right]$$

ตัวอย่างที่ 31 กำหนดฟังก์ชั่น $f: R \to R$, $g: R \to R$ และ $h: R \to R$ โดยที่

$$f(x) = 1 - 2|x| \ , \ g(x) = x^2 + 1 \ \text{และ} \ h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 1 - x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

จงหา

(1) $(fo(goh))(2)$

$= f(goh)(2))$

$= f(g(h(2)))$

= ______________

= ______________

= ______________

(2) $((hof)o(hog))(-1)$

$= (hof)((hog)(-1))$

$= (hof)(h(g(-1)))$

$= h(f(h(g(-1)))$

= ______________

= ______________

ฟังก์ชั่นอินเวอร์ส (Inverse Function)

บทนิยาม เรียกอินเวอร์สของฟังก์ชั่นที่เป็นฟังก์ชั่นว่า "ฟังก์ชั่นอินเวอร์ส"

พิจารณาฟังก์ชั่น f และ g ต่อไปนี้

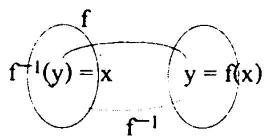
จาก	f	$= \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$	เป็นฟังก์ชั่นและ
จะได้	f^{-1}	$= \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$	เป็นฟังก์ชั่น
สำหรับ	g	$= \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$	เป็นฟังก์ชั่น
แต่	g^{-1}	$= \{(2,1), (3,2), (2,3)\}$	ไม่เป็นฟังก์ชั่น
พิจารณา	fof^{-1}	= ______________	
	$f^{-1}of$	= ______________	

จะเห็นว่า ______________________

ทฤษฎีบท (1) ให้ f เป็นฟังก์ชั่น ; f^{-1} เป็นฟังก์ชั่น ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชั่น 1 – 1

(2) ถ้า f เป็นฟังก์ชั่น 1 – 1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชั่น 1 – 1 ด้วย

(3) ให้ f เป็นฟังก์ชั่น 1 – 1 จะได้ว่า $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = f^{-1}(y)$



เมื่อ f เป็น 1 – 1 function

$(x, y) \in f \to y = f(x)$

$(y, x) \in f^{-1} \to x = f^{-1}(y)$

ข้อสังเกต 1) ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ แล้ว $f^{-1}: B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$

2) ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ แล้ว (i) $(f^{-1}of)(x) = x$ สำหรับทุก $x \in A$

(ii) $(fof^{-1})(x) = x$ สำหรับทุก $x \in B$

ตัวอย่างที่ 32 กำหนด $f = \{(x, y) | y = 2x - 3\}$ จงหา f^{-1} และ $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จาก $f = \{(x, y) | y = 2x - 3\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(y, s) | y = 2x - 3\}$

หรือ f^{-1} = ...

= ....

ดังนั้น $f^{-1}(x)$ = ...

จาก $y = f(x) = 2x - 3$

สลับตัวแปร : ....

หาค่า y ในรูป x : ....

....

....

พิจารณา (1) $(f^{-1}of)(x)$

= ________________

= ________________

= ________________

= ________________

= ________________

(2) $(fof^{-1})(x)$

= ________________

= ________________

= ________________

= ________________

= ________________

ตัวอย่างที่ 33 กำหนดฟังก์ชั่น $f(x) = \sqrt{5x + 4}$ เมื่อ $x \in [0, 10]$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ ก่อนอื่นหา $D_{f^{-1}}$ จาก R_f ดังนี้

เนื่องจาก $0 \leq x \leq 10$

ดังนั้น ________________

____

____

ดังนั้น $R_f = [2, 3\sqrt{6}\,] = D_{f^{-1}}$

หา $f^{-1}(x)$

เนื่องจาก $y = f(x) = \sqrt{5x +$

____

____

____

____

ตัวอย่างที่ 34 กำหนด $f\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{x}{2} + 1$ จงหาค่าของ $f^{-1}(-2)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 35 กำหนดฟังก์ชั่น $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

(i) จาก $y = 2x + 2$ เมื่อ $x \geq 0$, $y \geq 2$

____

____

____

(ii) จาก $y = -x^2 - 1$ เมื่อ $x < 0$, $y < -1$

____

____

____

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ -\sqrt{-x-1} & \text{เมื่อ } x < -1 \end{cases}$

(1) $D_{f^{-1}}$ = ____________________ (2) $f^{-1}(1)$ = ____________________

(3) $f^{-1}(2)$ = ____________________ (4) $f^{-1}(-5)$ = ____________________

ตัวอย่างที่ 36 กำหนดให้ $f(x + 3) = 4x - 5$

และ $g(x - 3) = 2 - 3x$

จงหา

(1) $(fog^{-1})(5)$

$= f(g^{-1}(5))$

= ____________________

= ____________________

= ______

(2) $(gof^{-1})(-1)$

$= g(f^{-1}(-1))$

= ____________________

= ____________________

=

พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of Functions)

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไป อาจสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x ของแต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หาร กัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง

$f+g = \{(x,y) \mid y = f(x)+g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g\}$

$f-g = \{(x,y) \mid y = f(x)-g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g\}$

$f.g = \{(x,y) \mid y = f(x).g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g\}$

$\frac{f}{g} = \{(x,y) \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0\}$

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดให้ $f = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$

$g = \{(0,3),(3,0),(2,0)\}$

จาก f และ g จะได้ $D_f = \{0,1,2\}$ และ $D_g = \{0,3,2\}$

ดังนั้น $D_f \cap D_g = \{0,2\}$

$f+g$ = ____________________

$f-g$ = ____________________

$f.g$ = ____________________

$\frac{f}{g}$ = ____________________

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \mid y-2x+1=0 ; 1 \le x < 4\}$

$g = \{(x,y) \mid y-2=0\}$

จะได้ $D_f \cap D_g$ = ____________________

1) $(f+g)(x)$ = ____________________

= ____________________

= ____________________

2) D_{f+g} = ____________________

ตัวอย่างที่ 39 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 4x$ $\Rightarrow f^{-1}(x) =$ ______

$g(x) = x^2 + 1$ $\Rightarrow g^{-1}(x) =$ ______

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow h^{-1}(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

จงหา

(1) $(f^{-1} + g - h^{-1})(-2)$

$= f^{-1}(-2) + g(-2) - h^{-1}(-2)$

= ______

= ______

(2) $((gof^{-1}) \cdot h)(2)$

$= (gof^{-1})(2) \cdot h(2)$

= ______

= ______

ตัวอย่างที่ 40 กำหนดให้ $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x) = x + 2$ จงหา

(1) $(f + g)(2)$

(2) $2((gof) \cdot f^{-1})(4)$

วิธีทำ หา f(x) ก่อน

เนื่องจาก $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$

ดังนั้น $f\left(\dfrac{x}{x-2}\right) = x$

______ = ______

______ = ______

______ = ______

______ = ______

หา g(x) ก่อน

เนื่องจาก $(fog)(x) = x +$

$f(g(x)) = x + 2$

______ = ______

______ = ______

______ = ______

______ = ______

(1) $(f + g)(2) = f(2) + g(2) =$ ______

(2) $2((gof) \cdot f^{-1})(4) = 2[(gof)(4) \cdot f^{-1}(4)]$

= ______

= ______

แบบทดสอบเรื่องฟังก์ชัน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. กำหนด $P = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ และ $Q = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
และความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in P \times Q \mid 2x - y = 0\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

    1. $D_r - R_r = \{-1, 1, 3, 4\}$
    2. $R_r - D_r = \{-2, 6\}$
    3. $Q - R_r = \{-6, 0\}$
    4. $P - D_r = \{4\}$

2. ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

    1. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid x^2 + y^2 = 25\}$
    2. $r_2 = \{(x, y) \in R^+ \times R \mid 2x^2 + 3y^2 = 18\}$
    3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y^2 - x^2 = 0\}$
    4. $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid y|x| = 1\}$

3. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1) r ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่มี $r_1 \subset r$ และ $r_1 \neq \varnothing$ และ r_1 เป็นฟังก์ชัน
(2) มีฟังก์ชัน r_1, r_2 โดยที่ $r_1 \subset r, r_2 \subset r$ และ $r_1 \cup r_2 = r$
(3) $D_r = R_r = [-1, 1]$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

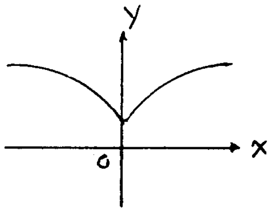
    1. ข้อความ (1) - (3) ถูกทุกข้อ
    2. ข้อความ (1) - (3) ถูก 2 ข้อ
    3. ข้อความ (1) - (3) ถูก 1 ข้อ
    4. ข้อความ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

4. กำหนดให้
$f = \left\{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{4 - x^2}\right\}$
$g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x - 2\}$
$h = \{(x, y) \in R \times R \mid y + x + 2 = 0$ และ $x \leq 0\}$
ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่เซตว่าง

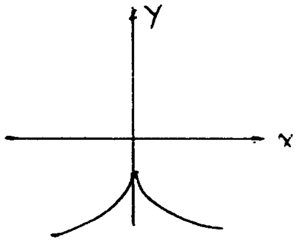
    1. $(f \cup g) \cup h$
    2. $(f \cap g) \cap h$
    3. $(f \cap h) \cup g$
    4. $(f \cap g) \cup h$

5. ฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$ มีกราฟเป็นรูปใดต่อไปนี้

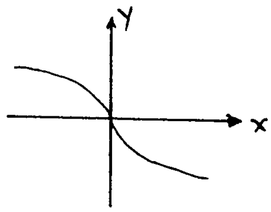
1.



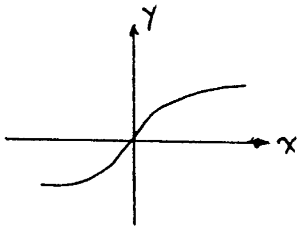
2.



3.

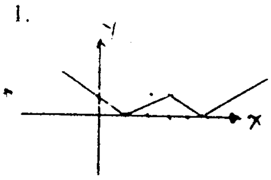


4.

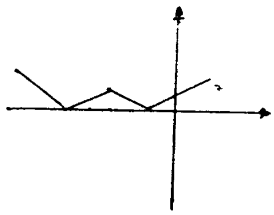


6. กราฟของ $f = \{(x, y) \mid y = \left| -|x-3| + 2 \right| \}$ คือข้อใด

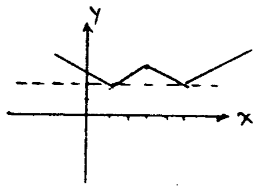
1.



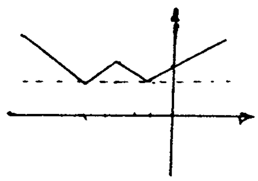
2.



3.



4.



7. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$ และกำหนดฟังก์ชัน

$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

$g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x} + 1\}$

$h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - x\}$

ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. f และ g 2. f และ h 3. g และ h 4. h

8. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^3\}$ เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R
2. $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |(x+2)^2 - 3|\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1−1
3. $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 2x + 3\}$ เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง $[0, \infty)$
4. $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| - 2\}$ เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง $[-2, \infty)$

9. ให้ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x|\}$

$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid |y| = x\}$

$r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1\}$

พิจารณา $r_1 \cap r_2$, $r_2 \cap r_3$ และ $r_1 \cap r_3$ ข้อใดถูกต้อง

1. $r_1 \cap r_2$ เท่านั้น เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. $r_2 \cap r_3$ เท่านั้น เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
3. $r_1 \cap r_3$ เท่านั้น ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4. $r_2 \cap r_3$ เท่านั้น ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

10. ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(0) = 2$, $f(1) = 3$

และ $f(x + 2) = 2f(x) - f(x + 1)$ ทุก ๆ $x \in R$ แล้ว $f(3)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. −3
2. 5
3. 7
4. 13

11. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงข้อความ

"กำหนดให้ $A \neq \varnothing$ เป็นเซตใด ๆ ถ้า $f : A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง"
ไม่เป็นจริง

1. $f(n) = n$, $\forall n \in N$, N = เซตของจำนวนเต็ม
2. $f(n) = 2n$, $\forall n \in N$, N = เซตของจำนวนเต็ม
3. $f(n) = \begin{cases} n & \text{; ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก} \\ n + 1 & \text{; ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่บวก} \end{cases}$
4. $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{; ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก} \\ \dfrac{n}{2} & \text{; ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่บวก} \end{cases}$

12. เมื่อ N แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ให้ $f : N \times N \rightarrow N$ กำหนดโดย

$f(1, n) = n + 1$ และ $f(m + 1, n) = f(m, n) \times n$ แล้ว $f(3, 2)$ มีค่าเป็นเท่าใด

1. 4

2. 6

3. 10

4. 12

13. กำหนด f เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(3x) = \frac{3f(x)}{3f(x)-1}$

2. $f(3x) = \frac{3f(x)}{2f(x)-1}$

3. $f(3x) = \frac{3f(x)}{3f(x)-3}$

4. $f(3x) = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

14. ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ แล้ว สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ค่าของ $g(|x| - x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x| - x)$
2. $x(x - |x|)$
3. $2x(|x| - x)$
4. $2x(x - |x|)$

15. กำหนดให้ $f(x) = 3x$ และ $g(x) = \frac{4}{x-2}$ ค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$ คือข้อใด

1. 2
2. $\frac{1}{2}$
3. -2
4. $-\frac{2}{3}$

16. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + 2y = 5\}$

และ $g = \{(x, y) \in R \times R \mid 2x - y = 3\}$ แล้ว gof คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y = 2\}$

2. $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - 4y = 11\}$

3. $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + 4x - 2y = 5\}$

4. $\{(x, y) \in R \times R \mid 4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0\}$

17. กำหนดให้ $f(x) = 10^x$; $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

และ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = (fog)(x)\}$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $D_r = [-1, 1]$; $R_r = [0, 1]$

2. $D_r = [0, 1]$; $R_r = [1, 10]$

3. $D_r = [-1, 1]$; $R_r = [1, 10]$

4. ไม่สามารถหา fog ได้

18. กำหนดฟังก์ชัน f และ g จากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R โดย $f(x) = 1 + |x|$ และ

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ค่าของ $(gof)(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + |x|$
2. $2 + |x|$
3. $\frac{1}{1+|x|}$
4. $\frac{1}{2+|x|}$

19. กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ เมื่อ $x \in R$ และ $(gof)(x) = x^2 + 2$ เมื่อ $x \in R$ แล้ว $g(x)$

มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{x^2-2x+3}{4}$

2. $\frac{x^2-2x+5}{4}$

3. $\frac{x^2-2x+7}{4}$

4. $\frac{x^2-2x+9}{4}$

20. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3}{x}$ และ $f^2(x) = fof(x)$ และ $f^n(x) = fof^{n-1}(x)$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 2 ค่าของ $fof^{101}(x)$ เท่ากับค่าในข้อใด

1. x
2. x^{51}
3. $\frac{3}{x}$
4. $\left(\frac{3}{x}\right)^{50}$

21. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f : R \rightarrow R^-$ และ $g : R \rightarrow R$

โดยที่ $(gof)(x) = 3f(x) - 1$

$g(x) = -4x^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. gof เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
3. fog เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4. $g(2) - f(0) = -15$

22. กำหนดให้ $a(x) = x + 1$, $b(x) = x - 1$, $c(x) = x^2 + 1$, $d(x) = x^2 - 1$

$(aof)(x) + (bog)(x) = 2$ และ $(cof)(x) - (dog)(x) = 4x$

แล้ว f(x) และ g(x) คือข้อใด

1. $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{3}{2} - x$
2. $f(x) = x - \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{3}{2} + x$
3. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$
4. $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, $g(x) = 1 + \frac{3x}{2}$

23. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R

โดย $f(x) = 2^x$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 1 \\ x^2 - 20 & ; x > 1 \end{cases}$$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $(gof)(n) \geq 0$ แล้ว n มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

24. ถ้า $r = \{(x, y) \mid y \leq x^2 \text{ และ } y \geq 2x\}$ แล้วเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 2]$
2. $[0, 4]$
3. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$
4. $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

25. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นความจริง

1. ถ้า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ แล้ว $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$
2. ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง B
3. ถ้า $f(x) = x^2 + x|\,.\,|$ เมื่อ $x \in R$ แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน
4. ถ้า $f(x) = 2x + |\,.\,|$ เมื่อ $x \in R$ แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน

26. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดถูกต้อง

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก A ไป B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จากเรนจ์ของ f ไปทั่วถึง(บน) A
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง C แล้ว $(gof)^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน
4. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A แล้ว $(fof)^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน

27. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x|x|\}$ อินเวอร์สของ r คือ

1. $r^{-1} = \left\{ (x,y) \middle| y = \begin{Bmatrix} \sqrt{x}\,; x \geq 0 \\ \sqrt{-x}\,; x < 0 \end{Bmatrix} \right.$

2. $r^{-1} = \left\{ (x,y) \middle| y = \begin{Bmatrix} \sqrt{x}\,; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}\,; x < 0 \end{Bmatrix} \right.$

3. $r^{-1} = \left\{ (x,y) \middle| y = \begin{Bmatrix} -\sqrt{x}\,; x \geq 0 \\ \sqrt{-x}\,; x < 0 \end{Bmatrix} \right.$

4. $r^{-1} = \left\{ (x,y) \middle| y = \begin{Bmatrix} -\sqrt{x}\,; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}\,; x < 0 \end{Bmatrix} \right.$

28. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{5x-7}{x-3}$ แล้ว $f^{-1}(9)$ มีค่าเท่ากับค่าในข้อใด

1. 4
2. 5
3. $\dfrac{17}{7}$
4. $\dfrac{17}{2}$

29. ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 2\}$
และ $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 7\}$
ค่าของ $(g^{-1}of^{-1})(2)$ คือข้อใด

1. $\frac{-17}{6}$
2. $\frac{-7}{2}$
3. $\frac{-1}{6}$
4. $\frac{7}{2}$

30. ถ้า $f(x) = x - 1$ และ $(gof^{-1})(x) = 4x^2 - 1$
แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) = 0$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-4, -1]$
2. $[-1, 0]$
3. $[0, 4]$
4. $[4, 6]$

31. กำหนดให้ $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $g(x) = x + 7$ จงหาค่าของ $(g^{-1}of)(-2) - (fog)^{-1}(-1)$

1. $\frac{-20}{3}$
2. $\frac{-17}{3}$
3. -1
4. 1

32. ถ้า $f(x) = x^3 + 1$ แล้ว $((f^{-1}of)of^{-1})(9)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 3
3. 9
4. 10

33. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$
และ $g = \{(x, y) \in R \times R \mid x = |y|\}$
ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $r^{-1}og^{-1} = g^{-1}or^{-1}$
2. $r^{-1}og^{-1} = r^{-1}$
3. $r^{-1}or^{-1} = r^{-1}$
4. $g^{-1}og^{-1} = g^{-1}$

34. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R

ถ้า $f(x) = x^3 + 1$ และ $(fog)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

แล้วค่าของ $(gof^{-1})(-7)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. -2
3. 1
4. 3

35. กำหนด f และ g ดังนี้ $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$ เมื่อ $x \in R$ และ $g(x) = |x|$ เมื่อ $x \in R$

เมื่อ $x = 3$ ค่าของ $\dfrac{[(f^{-1}og)(x) - (f^{-1}og)(2)]}{|x| - 2}$ เท่ากับค่าในข้อใด

1. 0.5
2. 1
3. 2
4. 6

36. กำหนดฟังก์ชัน $g(x) = 5x - 3$ และ $(gof)^{-1}(x) = x + 4$ ค่าของ $(g^{-1}of^{-1})(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{12}{5}$
2. $\frac{13}{5}$
3. $\frac{14}{5}$
4. $\frac{15}{5}$

37. ถ้า $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$ และ $(fog)(x + 2) = 3x + 6$ แล้ว $g(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{12}{5}$
4. $\frac{24}{11}$

38. กำหนด $f = \left\{ (x, y) \middle| y = \sqrt{x^2 - 1} \right\}$ และ $g = \left\{ (x, y) \middle| y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. โดเมนของ $\frac{g}{f} = [1, \infty)$
2. $(gof)(x) = \frac{1}{|-x|}$
3. $fog = \left\{ (x, y) \middle| y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$
4. $(fog)^{-1} = \left\{ (x, y) \middle| x = \frac{|y|}{\sqrt{1 - y^2}} \right\}$

39. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x \neq -1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = -1 \end{cases}$

นิยาม กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ f = g ก็ต่อเมื่อ $D_f = D_g$ และ $\forall x[x \in D_f \rightarrow f(x) = g(x)]$

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังข้างต้น ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f = g$ แต่ $f \neq h$
2. $f \neq g$ แต่ $f = h$
3. $f \neq g$ และ $f \neq h$
4. $f = g$ แต่ $g \neq h$

40. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) กำหนด $f = \left\{ (x, y) \in R \times R \middle| y = \frac{x+1}{x-1} \right\}$ แล้ว $f^{-1} = f$

(2) กำหนด $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ และ $g(x) = x - 1$

จะได้ $g(x) \cdot f(x) = x + 1$

ข้อใดสรุปถูกต้อง

1. ข้อ (1) ถูกข้อเดียว
2. ข้อ (2) ถูกข้อเดียว
3. ถูกทั้งสองข้อ
4. ผิดทั้งสองข้อ

41. ถ้า R เป็นเซตของจำนวนจริง f, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R กำหนดโดย

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 12}$, $g(x) = \frac{1}{x - 6}$ และ $h(x) = x - 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $g = f \cdot h$
2. $f = g \cdot h$
3. $\frac{f}{g} = h$
4. $\frac{g}{h} = f$

42. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

แล้วโดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(-\infty, 2]$

3. $(-3, 2)$ 4. $(-3, 2]$

43. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$ และ $g = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \dfrac{1}{x+1} \right\}$

โดเมนและเรนจ์ของ $f \cdot g$ ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x|\ \neq -1\}$ และ $\{y|y \leq -2$ หรือ $y \geq 0]$

2. $\{x|\ \neq -1\}$ และ $\{y|y \leq -4$ หรือ $y \geq 0]$

3. $\{x|\ \in R\}$ และ $\{y|-4 \leq y \leq 0\}$

4. $\{x|\ \in R\}$ และ $\{y|y \in R\}$

44. **กำหนดให้** $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3x^2 + 1}$; $g(x) = \sqrt{3-x}$; $h(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

ถ้า $U = \dfrac{g}{h}$ แล้ว $R_f \cap D_u$ **เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้**

1. $(-4, 1)$ 2. $(-1, 5)$

3. $(2, 7)$ 4. $(4, 8)$

45. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{เมื่อ } x \geq 3 \\ x^2 + 4 & \text{เมื่อ } x < 3 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2|x| & \text{เมื่อ } x > 5 \\ x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 5 \end{cases}$

จงหาค่าของ $(f+g)(4) - (f \cdot g)(2)$

1. -18 2. -9

3. 9 4. 62

46. กำหนดให้ $(f+g)(x) = 3x^2 + 3x - 11$ และ $(f-g)(x) = x^2 + 7x + 5$ จะได้

$(fog)(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ จงหาค่าของ $A + B + C + D + E$

1. 34

2. 84

3. 94

4. 114

47. ให้ $f : R \rightarrow R^+$ เมื่อ R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ $g : R \rightarrow R$

ถ้ากำหนดให้ $(gof)(x) = 3(f(x))^2 - 2f(x) + 1$ และ $g(x) = x^2 - x + 2$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(gof)(1) = 2$
2. $(g \cdot f)(1) = 2$
3. $\left(\frac{g}{f}\right)(1) = 2$
4. $(g - f)(1) = 2$

48. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ กำหนดโดย

$f(x) = a^{2x+1}$ และ $g(x) = bx + 5$

ถ้า $(fog^{-1})(-2) = 27$ และ $(fg)(0) = 15$ แล้ว $3f(-1) - 4g(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -35
2. -33
3. 37
4. 39

49. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน
2. $f \cup g$ ไม่เป็นฟังก์ชัน
3. fg เป็นฟังก์ชัน
4. fg ไม่เป็นฟังก์ชัน

50. ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $f : P(A) \rightarrow A$ โดยที่ $a \in P(A)$ และ

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \{1\} \not\subset a \\ 2 & \text{ถ้า } \{1\} \subset a \end{cases}$$

ฟังก์ชัน f ดังกล่าว สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกเหมือนกับเซตในข้อใด

1. $\{(\varnothing, 2), (\{1\}, 1), (\{2\}, 2), (A, 1)\}$
2. $\{(\varnothing, 2), (\{1\}, 2), (\{2\}, 1), (A, 2)\}$
3. $\{(\varnothing, 1), (\{1\}, 1), (\{2\}, 1), (A, 2)\}$
4. $\{(\varnothing, 1), (\{1\}, 2), (\{2\}, 1), (A, 2)\}$

51. ให้ $R^+ = \{x \in R | x \geq 0\}$ และ $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

บทนิยาม ให้ $f = \{(x, y) \in R^+ \times R^+ | f(x) = \sqrt{2x}\}$

และ $g(0) = 1$; $g(n + 1) = f(g(n))$ เมื่อ $n \in N$

ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

1. g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก N ไป R^+
2. fog เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก N ไป R^+
3. $R_g = R_{fog}$
4. $g(n) < 2, \forall n \in N$

52. **นิยาม** กำหนดให้ $F : R \rightarrow R$

(1) เราจะเรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันคู่ ก็ต่อเมื่อ $F(-x) = F(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$

(2) เราจะเรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันคี่ ก็ต่อเมื่อ $F(-x) = -F(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in R$

ถ้ากำหนดให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันคี่ แล้ว

ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. gof เป็นฟังก์ชันคู่
2. fog เป็นฟังก์ชันคู่
3. gog เป็นฟังก์ชันคี่
4. fof เป็นฟังก์ชันคี่

53. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x + 2$ และ $A = [-1, 4]$ ถ้านิยามเซต f(A) ดังนี้

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

แล้ว f(A) จะเท่ากับเซตในข้อใด

1. [5, 10]
2. [5, 14]
3. [1, 10]
4. [1, 14]

54. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ และสำหรับ $A \subset R$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง

นิยามเซต $f^{-1}(A)$ ดังนี้

$$f^{-1}(A) = \{x \in R | f(x) \in A\}$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $f^{-1}([0, 1]) = \{0\}$

(2) $f^{-1}((-\infty, 0]) = \varnothing$

(3) $f^{-1}([1, 2]) = [-1, 1]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) ถูกต้อง
2. ข้อ (2) และ (3) ถูกต้อง
3. ข้อ (1) และ (3) ถูกต้อง
4. ข้อ (1), (2) และ (3) ถูกต้อง

55. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ $f: R \rightarrow R$ กำหนดโดย

$$f(1-x) = \begin{cases} -1-x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$$

ถ้า $x * y = f(y-x^2)$ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ แล้ว ค่าของ $(-2) * f(3)$ มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $(-4, -2)$ 2. $(-2, 2)$
3. $(2, 4)$ 4. $(4, 6)$

56. **บทนิยาม** ให้ X เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ R และ f_x เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f_x(a) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } a \in X \\ 0 \text{ เมื่อ } a \in X' \end{cases}$$

ถ้า $A = \{x \in R \mid x^3 - 3x - 2 > 0\}$

และ $t = f_A((1.415)^2) + f_{A'}(1) + f_A(0.5) + f_{A'}(-1)$

แล้ว t มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

57. กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f \subset R \times R$, $g \subset R \times R$ ซึ่ง $(gof)(x) = -g(x) - 2xf(x)$ และ $g(x) = x^2$ ถ้า $|2x+1| \le 9$ แล้ว f(x) มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $[-5, 4]$ 2. $[-5, 5]$
3. $[-4, 5]$ 4. $[4, 5]$

58. ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset N \times N$ กำหนดโดย

(ก) $f(2) = 4$

(ข) $f(3) = 6$

(ค) $f(m.n) = f(m).f(n)$

(ง) ถ้า $m < n$ แล้ว $f(m) < f(n)$

ดังนั้นถ้า 4 หาร f(5) ลงตัว แล้ว f(5) มีค่าเท่าใด

1. 16 2. 20 3. 24 4. 28