



วิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง เมทริกซ์

โดย

อ.ชวลิต กุลเกียรติการ



TUTORIAL SCHOOL BY
THE BRAIN

โรงเรียนกวดวิชา คณิต-วิทย์ อันดับ 1 ของประเทศ

PAT 1
.....
MATRIX

MATRIX

By P'Golf WE BY THE BRAIN



1. สมบัติของทรานส์โพส

1. $(A^t)^t = A$ $((A^t)^t)^t = A^t$
 $A^{\text{คู่ } t} = A$ $A^{\text{คี่ } t} = A^t$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$
 $(ABC)^t = C^t B^t A^t$
5. $(A^t)^n = (A^n)^t$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
6. ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว $A^t = A$
7. ถ้า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร แล้ว $A^t = -A$

2. เกร็ดความจริงเกี่ยวกับการคูณ

1. โดยทั่วไป $AB \neq BA$ จึงทำให้
 $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
 $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
 $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$
2. ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
3. ถ้า $AB = AC$ แล้วไม่จำเป็นที่ $B = C$

3. สมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$; $\det A \neq 0$
3. $\det(A^t) = \det A$
4. $\det(kA) = k^n \det A$; n คือ มิติของเมทริกซ์ A
5. $\det(A^n) = (\det A)^n$
6. ถ้า $A = B$ แล้ว $\det A = \det B$
7. ถ้า $\det A = \det B$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $A = B$

4. สมบัติทั่วไปของดีเทอร์มิแนนต์

1. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ที่กำหนดให้มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง เป็น 0 ทั้งหมด $\det$ ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ 0

เช่น
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ที่กำหนดให้มีสองแถวใด หรือสองหลักใดเท่ากัน $\det$ ของเมทริกซ์นั้น เท่ากับ 0

เช่น
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. ถ้าเมทริกซ์ที่กำหนดให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนหรือสามเหลี่ยมล่างหรือเมทริกซ์เฉียง $\det$ ของเมทริกซ์นั้น เท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30$$

4. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของเมทริกซ์ A จะได้ว่า $\det B = -\det A$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det B = -\det A$

5. ถ้านำค่าคงที่คูณเข้า $\det$ หรือดึงออกจาก $\det$ ต้องเลือกกระทำจากแถวเดียว หรือหลักเดียวเท่านั้น

เช่น $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2 : 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(2) : \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$

↑
เอา 2 คูณเข้า $\det$

$\begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 6 : 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$

↑
ดึง 3 ออกจาก $\det$

6. ถ้านำค่าคงที่คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง แล้วนำไปบวกกับแถวหรือหลักอีกอันหนึ่ง จะเกิดเมทริกซ์ใหม่ซึ่งมีค่า $\det$ เท่าเดิม

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \begin{vmatrix} 1+2(3) & 2+2(4) \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \xrightarrow{C_1 + 3C_2} \begin{vmatrix} 2+3(0) & 0 \\ 0+3(3) & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 6$

5. การหาอินเวอร์สมทริกซ์

เมทริกซ์ขนาด 1×1

$$\text{ถ้า } A = [a] \text{ จะได้ } A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]; a \neq 0$$

เมทริกซ์ขนาด 2×2

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}; \det A \neq 0$$

เมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A \quad \text{เมื่อ } \det A \neq 0$$

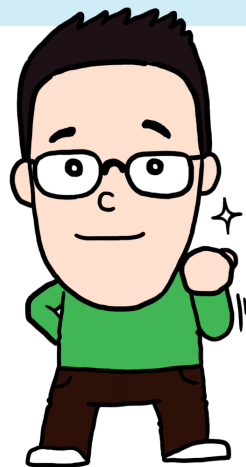
5-1 เทคนิคการหาสมาชิกบางตัวในอินเวอร์สมทริกซ์

เมื่อ $\bar{a}_{ij}^1$ เป็นสมาชิกแถวที่ i หลักที่ j ของ A^{-1}

$$\text{จะได้ } \bar{a}_{ij}^1 = \frac{1}{\det A} C_{ji}(A)$$

5-2 สมบัติอินเวอร์สการคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
6. โดยปกติ $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$



CHALLENGE PROBLEMS

MATRIX

1. ถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2b & b \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ

ศูนย์ที่ทำให้ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ข้อใดเป็นค่าของ $4 \det(A) - \det(B)$

1. 12 2. 13 3. 14 4. 15

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $A^3 = B^3$ และ $AB = BA$ ถ้า $A^2 + B^2 + 4I = 0$ และ $A - B$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้ว $\det(AB)$ เท่ากับข้อใด

1. 4 2. 8 3. 16 4. 64

3. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน}$$

และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S

ถ้า $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ $\det\left(\left((A^t)^{-1}\right)^t\right)^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

4. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 โดยที่

$$2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ค่าของ $\det(A^4 B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c และ d

เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $abcd = 9$ และ $ad \neq bc$

ถ้า $AB^{-1} = B^{-1}A$ และ $\det(A^t B) = -24$

แล้วค่าของ $a+b+c+d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|------|------|
| 1. 5 | 2. 6 |
| 3. 7 | 4. 8 |
| 5. 9 | |

6. กำหนดให้ $S = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \mid a_i \in S, 1 \leq i \leq 6 \right\}$$

สุ่มหยิบเมทริกซ์จากเซต M มา 1 เมทริกซ์ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ ซึ่งค่า
 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ 27 หรือ -27 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1. $\frac{2}{6^3}$ | 2. $\frac{4}{6^3}$ | 3. $\frac{6}{6^3}$ | 4. $\frac{8}{6^3}$ | 5. $\frac{10}{6^3}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|

7. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} |x| & 1 \\ 2 & x-|y| \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y & 3 \\ -1 & |y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+x & 0 \\ 7 & 7-y \end{bmatrix}^t$$

แล้วค่าของ $x+y$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ A เป็น 2×3 เมทริกซ์ B เป็น 3×2 เมทริกซ์ และ C เป็น 2×2 เมทริกซ์

โดยที่ $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(AB) - \det(BA) = 0$

(ข) ถ้า $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $CAB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

9. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = 6$ ถ้า $B = \begin{bmatrix} a & 3g & d \\ b & 3h & e \\ c & 3i & f \end{bmatrix}$ แล้ว

ค่าของ $\det(-2B)$ จะเป็นเท่าใด

1. -144

2. -36

3. 36

4. 144

10. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ โดยการดำเนินการตามแถว $R_2 - 3R_1$

แล้ว $a+b+c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 5 & a & -a \end{vmatrix} = -17$$

แล้วค่าของ $\begin{vmatrix} 5+2a & 2 & 5 \\ 8+a & 2b & a \\ 2-a & 0 & -a \end{vmatrix}$ เท่ากับเท่าใด

12. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 10×10 และ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ A ดังนี้

ขั้นที่ 1 สลับแถวที่ 2 และแถวที่ 3

ขั้นที่ 2 คูณแถวที่ 5 ด้วย 2

ถ้า $\det(A) = -5$ แล้ว $\det(B^{-1})$ มีค่าเท่าใด

1. 0.1

2. 0.2

3. 0.3

4. 0.4

5. 0.5

13. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ และ } ABA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $BAB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 32 \end{bmatrix}$

(ข) $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

14. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-x & 2 & 2x \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $C_{22}(A) = 14$ แล้ว $\det(\text{adj } A)$ มีค่าเท่าใด

15. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีมิติ 3×3 และ $\det(A) \neq 0$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(\det(A))^3 = \det(\text{adj}(A))$

(ข) ถ้า $A^2 = 2A$ แล้ว $\det(A) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

16. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) > 0$

$$\det(A \text{ adj } A) - 2(\det A)^2 - 3 \det A = 0$$

และ $AB = I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $7 \det B - \det A^t < 0$

(ข) $\det(2A - 3 \text{ adj } B) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

17. กำหนดให้ A หรือ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ $n \times n$ และ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $I_n - AB = I_n - BA$

(ข) $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก และ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด และ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

18. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่

$ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A สอดคล้องกับสมการ $2(A - I)^{-1} = 4I - A$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $ab = 2$

(ข) $\det(3A^2 A^t A^{-1}) = 324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก และ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

19. กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $\det(A) > 0$

และ $M_{ij}(A)$ เป็นไมเนอร์ของ a_{ij} โดยที่ $[M_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1} = [b_{ij}]$ แล้ว $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{25}$ 2. $\frac{4}{25}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{4}{5}$ 5. $\frac{9}{5}$

20. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$

และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $AB + 3A = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่มีมิติ 3×3
แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. -1 3. -2 4. -2.5

21. จากสมการ $A^2x = b$ โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ และ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

x_3 มีค่าเท่าใด

1. -141

2. -75

3. 11

4. 49

22. ถ้า x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$x - 2y + 3z = a$$

$$x - 3y = b$$

$$2x - 5y + 5z = c$$

และ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & -3 & 0 & b \\ 2 & -5 & 5 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$

แล้ว c มีค่าเท่ากับเท่าใด



โรงเรียนทวดวิชาที่มีสาขามากที่สุด ครอบคลุมทั่วประเทศ

โดยเป็นสาขาของ WE เอง ไม่มีการใช้
สถานที่ร่วมกับสถาบันอื่น ทำให้มั่นใจได้ว่า
น้องจะได้รับความสะดวกสบาย และบริการ
ที่เป็นมาตรฐานเดียวกันทั่วประเทศ

มีสาขามากถึง

37 สาขา

ใน **33** จังหวัดทั่วประเทศ

* งามวงศ์วาน	0-2953-5333	* หอนงาย	042-464545-46
* พญาไท	0-2644-6363	* นครสวรรค์	056-331889, 899
* ปิ่นเกล้า	0-2434-0363-4	* เพชรบูรณ์	055-225158-9
* บางกะปิ	0-2370-3300	* เชียงใหม่	053-814473, 77
* วงเวียนใหญ่	0-2861-7970, 72	* เชียงราย	053-752879-80
* ศรีนครินทร์	0-2022-0016-8	* ลำปาง	054-218444
* ฟิวเจอร์พาร์ค รังสิต	0-2958-0694	* แม่ฮ่องสอน	054-521177-8
	0-2567-5442	* หาดใหญ่	074-347346-7
* ชลบุรี	038-275930-2	* สุราษฎร์ธานี	077-218770-1
* ระยอง	038-610300, 400	* นครศรีธรรมราช	075-319388-9
* สุพรรณบุรี	035-523255-6	* พัทลุง	074-616890, 433
* ราชบุรี	032-337000	* ภูเก็ต	076-215613, 616
* สระบุรี	036-711999	* ตรัง	075-210777
* ลพบุรี	036-414-141		075-211700
	036-412-200	* สุพรรณ	077-503131
* มหาสารคาม	043-970505		077-504242
* นครราชสีมา	044-263503-4	* WE CARE	02-952-6767
* ขอนแก่น	043-322577-8		
* ร้อยเอ็ด	043-516161-2		
* อุดรธานี	042-329365-6		
* บุรีรัมย์	044-620208-9		
* อุบลราชธานี	045-311657-8		
* สกลนคร	042-715217-8		
* ศรีสะเกษ	045-612483-4		
* สุรินทร์	044-511771-2		



อัปเดต เดชข้อสอบ
ทุกสนามสอบสำคัญ

www.youtube.com/WeByTheBrain



แฟนเพจ **มากกว่า 3 แสนคน**
www.facebook.com/WeByTheBrain

