



**วิชาคณิตศาสตร์**  
**เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน**

**โดย**

**อ.มนตรี นิรมิตศิริพงศ์**



TUTORIAL SCHOOL BY  
**THE BRAIN**

**PAT 1**  
.....  
**COMPLEX NUMBER**  
**BY P'CHANG**

[www.facebook.com/WeByTheBrain](https://www.facebook.com/WeByTheBrain)  
[www.WeByTheBrain.com](http://www.WeByTheBrain.com)

## พิชิตข้อสอบ PAT 1

### เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1. ค่าของ  $i^{2015} \cdot i^{2016} \cdot i^{2017} \cdot \dots \cdot i^{2588}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ถ้า  $z = i^{0!} + i^{1!} + i^{2!} + i^{3!} + \dots + i^{100!}$

แล้ว  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 95

2. 96

3. 97

4. 98

3. ถ้า  $z = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2558}$  แล้วค่าของ  $z\bar{z}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0                      2. 1                      3. 2                      4. 4

4. ให้  $z_1, z_2, z_3, \dots$  เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อนโดยที่

$$z_1 = 1+i \text{ และ } z_{n+1} = iz_n + 1 \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \dots \text{ เมื่อ } i = \sqrt{-1}$$

ค่าสัมบูรณ์ของ  $z_{2559}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0                      2. 1                      3.  $\sqrt{2}$                       4. 2

5. ถ้า  $z$  และ  $w$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว  $\bar{z}w + z\bar{w}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{w^2+z^2}{wz}$

2.  $2\operatorname{Re}(zw)$

3.  $2\operatorname{Re}(z\bar{w})$

4.  $2\operatorname{Im}(\bar{z}w)$

6. ถ้า  $z = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^{2015} + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^{2015}$  แล้วค่าสัมบูรณ์ของ  $\operatorname{Im}(z)$  เท่ากับเท่าใด

7. ถ้า  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง  $z \neq 0$  และ  $(12 - 5i)z^3(-3 - 4i) = 195\bar{z}$   
แล้ว  $z\bar{z}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $|z| + 2\bar{z} - 3z = 3 - 45i$   
เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ  $z$  และ  $\bar{z}$  แทนสังยุค (conjugate) ของ  $z$   
ค่าของ  $|z|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 พ.ย. 57)
1. 95                      2. 225                      3. 245                      4. 375

9. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ

$$\bar{z} - 1 - 4i = 3i(z - i) \text{ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)}$$

1.  $z + \bar{z} = i(z - \bar{z})$

2.  $|z + 2| = 2$

3.  $\bar{z}^2 - 8i = 0$

4.  $z(1 - i)^3 - 8i = 0$

10. กำหนดให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$3|z|^2 - (28 - i)z + 4z^2 = 0 \text{ และให้ } B = \{|z + i| \mid z \in A\}$$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $B$  เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

11. Prove the identity

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

for all complex number  $z_1, z_2$

12. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง  $|z_1 + z_2|^2 = 5$

และ  $|z_1 - z_2|^2 = 1$  ค่าของ  $|z_1|^2 + |z_2|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

13. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

โดยที่  $|z_1 + z_2| = 3$  และ  $|z_1 - z_2| = 1$

(เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน  $z$ )

ค่าของ  $|z_1|^2 + |z_2|^2$  เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 55)

14. ให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $|z_1| = \sqrt{2}$  ,  $|z_2| = \sqrt{3}$  และ  $|z_1 - z_2| = 1$

แล้วค่าของ  $|z_1 + z_2|$  เท่ากับเท่าใด เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ของ  $z$  (PAT 1 พ.ย. 57)

15. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง  $|z_1 + z_2| = 3$   
และ  $z_1 \bar{z}_2 = 3 + 4i$  ค่าของ  $|z_1|^2 + |z_2|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1. 3                      2. 4                      3. 5                      4. 6

16. กำหนดให้  $z_1, z_2$  และ  $z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีสมบัติว่า  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$   
และ  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  ค่าของ  $|z_1 - z_2|$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\sqrt{2}$                       2.  $\sqrt{3}$                       3. 2                      4.  $\sqrt{5}$

17. ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $z_1 = a+bi$  และ  $z_2 = c+di$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $a, b, c, d \in R - \{0\}$  และ  $i = \sqrt{-1}$

สมมติว่า มีจำนวนจริง  $t$  และ  $s$  ที่ว่า  $z_1^2 + z_2^2 = t$  และ  $z_1 - z_2 = s$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $|z_1| = |z_2|$

(ข)  $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 58)

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

18. กำหนดให้  $z = a+bi$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่  $ab > 0$  และ  $i = \sqrt{-1}$

ถ้า  $z^3 = i$  แล้วค่าของ  $|iz^5 + 2|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ  $z$ ) (PAT 1 มี.ค. 58)

1.  $5+2\sqrt{3}$       2. 7      3.  $5-2\sqrt{3}$       4. 3

19. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $z^4 + 1 = 0$

ค่าของ  $|z + \frac{1}{z}|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1. 1      2. 2      3. 3      4. 4

20. ให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ  $\bar{z}_2$  แทนสังยุค (conjugate) ของ  $z_2$

ถ้า  $5z_1 + 2z_2 = 5$  และ  $\bar{z}_2 = 1 + 2i$  เมื่อ  $i^2 = -1$  แล้ว

ค่าของ  $|5z_1^{-1}|$  เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

21. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $2|z+1| = |z+4|$

ค่าของ  $|\bar{z}|$  เท่ากับเท่าใด (เมื่อ  $\bar{z}$  แทนสังยุค (conjugate) ของ  $z$ ) (PAT 1 ต.ค. 55)

22. ถ้า  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ  $|z-9| = 3|z-1|$  แล้ว  $z\bar{z}$  อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1.  $[0, 5]$                       2.  $(5, 9)$                       3.  $[9, 13)$                       4.  $[15, \infty)$

23. ค่าสัมบูรณ์ของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน  $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  คือข้อใด

1.  $\sqrt{2}$                       2. 2                      3.  $2\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|$                       4.  $2\left|\cos \frac{\theta}{2}\right|$

24. กำหนดให้  $z = x + yi$  และ  $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a+ci}$  เมื่อ  $a, b, c, x$  และ  $y$

เป็นจำนวนจริง แล้ว  $z\bar{z}$  จะเท่ากับเท่าใด

1.  $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b+c)^2}$

2.  $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b^2+c^2)}$

3.  $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b+c)^2}$

4.  $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b^2+c^2)}$

25. ถ้า  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มี  $|z| = 1$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $z + z^{-1} = 2\text{Re}(z)$

ข.  $|z-1| = |1-z^{-1}|$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

26. กำหนด  $z_1 + z_2 + z_3 + \dots, z_n$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{และ } |z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n| = 1$$

$$\text{ค่าของ } \left| \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n}{z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} + \dots + z_n^{-1}} \right| \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

27. กำหนดให้  $z_1, z_2, z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$$\text{และ } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ ค่าของ } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \text{ มีค่าเท่ากับเท่าใด}$$

28. If  $z_1, z_2$  are two different complex numbers such that  $|z_1| = |z_2| = 1$ ,  
then the expression  $\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$  equals

29. Let  $\left| \frac{z_1 - 2z_2}{2 - z_1 \bar{z}_2} \right| = 1$  and  $|z_2| \neq 1$ , where  $z_1, z_2$  are complex numbers the value of  $|z_1|$  is

30. If  $|z_1| = 2$ ,  $|z_2| = 3$ ,  $|z_3| = 4$  and  $|z_1 + z_2 + z_3| = 5$

then  $|4z_2z_3 + 9z_3z_1 + 16z_1z_2|$  equals



[www.facebook.com/WeByTheBrain](http://www.facebook.com/WeByTheBrain)  
[www.WeByTheBrain.com](http://www.WeByTheBrain.com)