



เศษส่วนของพหุนาม

อ.กนกวลี อุษณกรกุล
โรงเรียนสายน้ำผึ้ง ในพระอุปถัมภ์ฯ

การคูณและหารเศษส่วนของพหุนาม

หลักการ : ใช้การแยกตัวประกอบของพหุนาม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลสำเร็จของ $\frac{x^2 - xy}{x^2 - 2x - 3} \div \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 + 2xy - 3x - 6y}$

วิธีทำ $\frac{x^2 - xy}{x^2 - 2x - 3} \div \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 + 2xy - 3x - 6y}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - xy}{x^2 - 2x - 3} \times \frac{x^2 + 2xy - 3x - 6y}{x^2 + xy - 2y^2} \\ &= \frac{x(x - y)}{(x - 3)(x + 1)} \times \frac{[(x^2 + 2xy) - (3x + 6y)]}{(x + 2y)(x - y)} \\ &= \frac{x(x - y)}{(x - 3)(x + 1)} \times \frac{[x(x + 2y) - 3(x + 2y)]}{(x + 2y)(x - y)} \\ &= \frac{x(x - y)}{(x - 3)(x + 1)} \times \frac{(x + 2y)(x - 3)}{(x + 2y)(x - y)} \\ &= \frac{x}{x + 1} \end{aligned}$$

แนวข้อสอบ

1. ค่าของ $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - xy} \div \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x} \times \frac{3x^3 + 24}{12x - 6x^2 + 3x^3}$ เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{3}{x}$

ข. $1 + \frac{2}{x}$

ค. $\frac{2}{x}$

ง. $1 + \frac{3}{x}$

รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 - y^4}{x^2 - xy} \div \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x} \times \frac{3x^3 + 24}{12x - 6x^2 + 3x^3} \\ &= \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 - xy} \times \frac{x}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} \times \frac{3(x^3 + 8)}{3x(4 - 2x + x^2)} \\ &= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}{x(x - y)} \times \frac{x}{(x + y)(x^2 + y^2)} \times \frac{3(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{3x(x^2 - 2x + 4)} \\ &= \frac{(x + 2)}{(x)} = 1 + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

2. $(x^3 + y^3)(3x^2 - 5xy + 2y^2)$ หารด้วย $(x^2 - xy + y^2)(3x^2 + xy - 2y^2)$ ได้ผลหารตรงกับข้อใด

ก. $x - y$

ข. $2x - y$

ค. $x + y$

ง. $3x + y$

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \frac{(x^3 + y^3)(3x^2 - 5xy + 2y^2)}{(x^2 - xy + y^2)(3x^2 + xy - 2y^2)} \\ &= \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)(3x - 2y)(x - y)}{(x^2 - xy + y^2)(3x - 2y)(x + y)} \\ &= x - y \end{aligned}$$

3. รากที่สองของ $\frac{(3x^2 + 5xy - 2y^2)(2x^2 + xy - 6y^2)}{6x^2 - 11xy + 3y^2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $x - 2y$

ข. $3x + y$

ค. $x + 2y$

ง. $2x + 3y$

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \frac{(3x^2 + 5xy - 2y^2)(2x^2 + xy - 6y^2)}{6x^2 - 11xy + 3y^2} \\ &= \frac{(3x - y)(x + 2y)(2x - 3y)(x + 2y)}{(3x - y)(2x - 3y)} \\ &= (x + 2y)^2 \end{aligned}$$

รากที่สองของ $(x + 2y)^2$ เท่ากับ $\pm (x + 2y)$

รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

4. $[(x^3 + 2x)(x^2 + 1) + x(x^4 + x^2 - 2) - (x^3 - x)(x^2 + 2)] \times \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}$ มีผลลัพธ์ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 2)}$

ข. $\frac{x(x^2 - 1)}{(x^2 + 2)}$

ค. $\frac{x(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 2)}$

ง. $\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)}$

แนวคิด

$$\begin{aligned} & [(x^3 + 2x)(x^2 + 1) + x(x^4 + x^2 - 2) - (x^3 - x)(x^2 + 2)] \times \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4} \\ &= [x(x^2 + 2)(x^2 + 1) + x(x^2 + 2)(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)(x^2 + 2)] \times \frac{1}{(x^2 + 2)(x^2 + 2)} \\ &= \frac{x(x^2 + 2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)(x^2 + 2)} \\ &= \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)} \end{aligned}$$

5. ถ้า $\frac{x^5y - 8x^2y^4}{x^4y + 4x^2y^3 + 16y^3} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{x^2 - 4y^2} = \frac{P(x)}{x + 2y}$ แล้ว $P(x)$ คือพหุนามใด

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \frac{x^5y - 8x^2y^4}{x^4y + 4x^2y^3 + 16y^3} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{x^2 - 4y^2} \\ &= \frac{x^2y(x^3 - 8y^3)}{y(x^4 + 4x^2y^2 + 16y^2)} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{(x - 2y)(x + 2y)} \\ &= \frac{x^2(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)}{(x^4 + 8x^2y^2 + 16y^2) - 4x^2y^2} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{(x - 2y)(x + 2y)} \\ &= \frac{x^2(x^2 + 2xy + 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2 - (2xy)^2} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{(x + 2y)} \\ &= \frac{x^2(x^2 + 2xy + 4y^2)}{(x^2 + 4y^2 + 2xy)(x^2 + 4y^2 - 2xy)} \times \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{(x + 2y)} \\ &= \frac{x^2}{x + 2y} = \frac{P(x)}{x + 2y} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(x) = x^2$

รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

6. กำหนดให้ $x = 4$ $y = 3$ แล้วค่าของ $\frac{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4}{2x + 3y + 2}$ เท่ากับเท่าใด

ก. -3

ข. 8

ค. 12

ง. 15

แนวคิด $\frac{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4}{2x + 3y + 2}$

$$= \frac{(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 4}{2x + 3y + 2} = \frac{(2x + 3y)^2 - 2^2}{2x + 3y + 2}$$
$$= \frac{(2x + 3y - 2)(2x + 3y + 2)}{(2x + 3y + 2)}$$
$$= 2x + 3y - 2$$

แทนค่า $x = 4$ $y = 3$ จะได้ $2x + 3y - 2 = 2(4) + 3(3) - 2 = 15$



รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

หลักการ

1. หา ค.ร.น. ของพหุนามตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามทั้งหมดที่ต้องการนำมาบวกลบกัน
2. บวกลบกันเช่นเดียวกับการบวกลบเศษส่วนธรรมดา

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลสำเร็จของ $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} - \frac{3x}{6x - 4} + \frac{5x}{6x^2 + 2x - 4}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} - \frac{3x}{6x - 4} + \frac{5x}{6x^2 + 2x - 4} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{3x}{2(3x - 2)} + \frac{5x}{2(3x^2 + x - 2)} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{3x}{2(3x - 2)} + \frac{5x}{2(3x - 2)(x + 1)} \\ &= \frac{2(3x - 2)(x^2 - 2x) - 3x(x + 1)(x - 2) + 5x(x - 2)}{2(x + 1)(3x - 2)(x - 2)} \\ &= \frac{6x^3 - 16x^2 + 8x - 3x^3 + 3x^2 + 6x + 5x^2 - 10x}{2(x + 1)(3x - 2)(x - 2)} \\ &= \frac{3x^3 - 8x^2 + 4x}{2(x + 1)(3x - 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x(3x^2 - 8x + 4)}{2(x + 1)(3x - 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x(3x - 2)(x - 2)}{2(x + 1)(3x - 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x}{2(x + 1)} \end{aligned}$$

รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

7. ข้อใดมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ของ $\frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{m^2 n^2 - \frac{1}{m^2 n^2}} + \frac{(m - \frac{1}{m})(n - \frac{1}{n})}{mn + \frac{1}{mn}}$

ก. 1

ข. 0

ค. $\frac{1}{m^2 n^2 - \frac{1}{m^2 n^2}}$

ง. $\frac{1}{mn + \frac{1}{mn}}$

แนวคิด $\frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{m^2 n^2 - \frac{1}{m^2 n^2}} + \frac{(m - \frac{1}{m})(n - \frac{1}{n})}{mn + \frac{1}{mn}}$

$$= \frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{(mn - \frac{1}{mn})(mn + \frac{1}{mn})} + \frac{(m - \frac{1}{m})(n - \frac{1}{n})}{mn + \frac{1}{mn}}$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} + (mn - \frac{m}{n} - \frac{n}{m} + \frac{1}{mn})(mn - \frac{1}{mn})}{(mn - \frac{1}{mn})(mn + \frac{1}{mn})}$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} + m^2 n^2 - m^2 - n^2 + 1 - 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2 n^2}}{(mn - \frac{1}{mn})(mn + \frac{1}{mn})}$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} + (m - \frac{1}{m})(n - \frac{1}{n})(mn - \frac{1}{mn})}{(mn - \frac{1}{mn})(mn + \frac{1}{mn})}$$

$$= \frac{m^2 n^2 - \frac{1}{m^2 n^2}}{(m^2 n^2 - \frac{1}{m^2 n^2})} = 1$$

8. ค่าของ $\frac{2m-1}{m^2+m} + \frac{2m+1}{m^2-m} + \frac{4m+2}{m-m^3}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{4}{m-1}$

ข. $\frac{4}{m+1}$

ค. $\frac{4m}{m-1}$

ง. $\frac{4m}{m+1}$



รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad & \frac{2m-1}{m^2+m} + \frac{2m+1}{m^2-m} + \frac{4m+2}{m-m^3} \\
 = & \frac{2m-1}{m(m+1)} + \frac{2m+1}{m(m-1)} + \frac{4m+2}{m(1-m^2)} \\
 = & \frac{2m-1}{m(m+1)} + \frac{2m+1}{m(m-1)} - \frac{4m+2}{m(m^2-1)} \\
 = & \frac{2m^2-3m+1+2m^2+3m+1-4m-2}{m(m+1)(m-1)} \\
 = & \frac{2m-1}{m(m+1)} + \frac{2m+1}{m(m-1)} - \frac{4m+2}{m(m+1)(m-1)} \\
 = & \frac{(2m-1)(m-1) + (2m+1)(m+1) - (4m+2)}{m(m+1)(m-1)} \\
 = & \frac{4m^2-4m}{m(m+1)(m-1)} \\
 = & \frac{4m(m-1)}{m(m+1)(m-1)} \\
 = & \frac{4}{m+1}
 \end{aligned}$$

9. ผลสำเร็จของ $\frac{1}{(p-q)(p-r)} + \frac{1}{(q-r)(q-p)} + \frac{1}{(r-p)(r-q)}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. $\frac{3}{(p-q)(q-r)(r-p)}$

รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad & \frac{1}{(p-q)(p-r)} + \frac{1}{(q-r)(q-p)} + \frac{1}{(r-p)(r-q)} \\
 &= -\frac{1}{(p-q)(r-p)} - \frac{1}{(q-r)(p-q)} - \frac{1}{(r-p)(q-r)} \\
 &= \frac{-(q-r)-(r-p)-(p-q)}{(p-q)(q-r)(r-p)} \\
 &= \frac{-q+r-r+p-p+q}{(p-q)(q-r)(r-p)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

10. ให้ $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{x-2}{x^2(x-1)}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $A = 2$

ข. $B = -1$

ค. $C = 1$

ง. $A + B + C = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad & \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{x-2}{x^2(x-1)} \\
 & \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x^2(x-1)} \\
 & \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x^2(x-1)} \\
 & \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x^2(x-1)}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A + C = 0 \quad \dots(1)$

$B - A = 1 \quad \dots(2)$

$B = 2 \quad \dots(3)$

แทน $B = 2$ ใน (2) $2 - A = 1$

$A = 1$

แทน $A = 1$ ใน (1) $1 + C = 0$

$C = -1$

จะได้ $A + B + C = 2 + (1) + (-1) = 2$



รายการที่ 17 เศษส่วนของพหุนาม

การแก้สมการของเศษส่วนของพหุนาม

หลักการ

1. ทำส่วนให้หมดไป โดยนำ ค.ร.น. ของส่วนทั้งหมดมาคูณตลอดสมการ
2. ทำข้างใดข้างหนึ่งของสมการให้เท่ากับศูนย์
3. แยกตัวประกอบ
4. หาค่าของตัวแปรที่ต้องการ
5. สิ่งที่ต้องระวังคือ ค่าของตัวแปรต้องไม่ใช่ค่าที่ทำให้ตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามมีค่าเท่ากับ ศูนย์

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 9}$

วิธีทำ $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-3)(x+3)}$

นำ $(x-3)(x+3)$ คูณตลอดสมการ

$$(x+3) - (x-3) = x^2 - 2x + 3$$

$$x+3 - x+3 = x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x-3 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x+1 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -1$$

$$\text{แต่ } x \neq 3 \quad \quad \quad \text{ดังนั้น } x = -1$$

