

## คณิตศาสตร์ รายการที่ 10 : ฟังก์ชัน

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคูใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้นถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน

จากการทำโจทย์ด้วยวิธีพื้นฐานเป็นจำนวนมาก ถ้าเราหัดสังเกตจะพบเลยว่า การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันสามารถทำได้ง่ายๆ โดยการสังเกตที่..... แค่นั้นก็มองออกแล้ว ด้วยเหตุผลที่สามารถนำมาสรุปเป็นหลักได้ดังนี้

1. ถ้า..... มักจะไม่เป็นฟังก์ชัน
2. ถ้า..... มักจะไม่เป็นฟังก์ชัน
3. ถ้า..... มักจะไม่เป็นฟังก์ชัน
4. ถ้า..... มักจะไม่เป็นฟังก์ชัน

**Ex.1** ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1.  $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x - 2| + 3\}$
2.  $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 - 2x + 3\}$
3.  $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2 - 3x}\}$
4.  $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid y > x - 3\}$

ตอบข้อ.....ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ.....

**Ex.2** ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1.  $\{(x, y) \mid y = |x - 1| + 2\}$
2.  $\{(x, y) \mid y = x^2 - 2x + 8\}$
3.  $\{(x, y) \mid |y| = |x| + 5\}$
4.  $\{(1, 2), (3, 4), (5, 4), (7, 9)\}$

ตอบข้อ.....ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ.....

**Ex.3** r แทนความสัมพันธ์ จงตรวจสอบดูว่าความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1.  $r = \{(x, y) \mid x|y| = -1\}$
2.  $r = \{(x, y) \mid |xy| = 1\}$
3.  $r = \{(x, y) \mid |x|y = 1\}$
4.  $r = \{(x, y) \mid |y| = 4x + 5\}$

ตอบข้อ.....เป็นฟังก์ชันเพราะ.....

Ex.4 ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1.  $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 4\}$

2.  $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x + y| = 1\}$

3.  $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^3 + 1\}$

4.  $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^2 + 2x + 1\}$

ตอบข้อ.....เป็นฟังก์ชันเพราะ.....

Ex.5 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน ( EN1 )

1.  $\{(x, y) \in A \times A \mid y > x\}, A = \{1, 2, 3\}$

2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2y = 1\}$

3.  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| = x - 2\}$

4.  $\{(x, y) \in B \times B \mid y = |x| - 2\}, B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

### โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

**นิยาม** ให้  $f$  เป็นความสัมพันธ์จาก  $A$  ไป  $B$

**โดเมน** คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับใน  $f$  เขียนแทนด้วย  $D_f$

**เรนจ์** คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับใน  $f$  เขียนแทนด้วย  $R_f$

### การหาโดเมนและเรนจ์ด้วยการจัดรูป

**ขั้นที่ 1** ต้องจัดรูปสมการโดย

หาโดเมน  $\Rightarrow$  จัด  $y$  ใน เทอม  $x \dots (y = ?x)$

หาเรนจ์  $\Rightarrow$  จัด  $x$  ใน เทอม  $y \dots (x = ?y)$

**ขั้นที่ 2** เมื่อจัดรูปเสร็จจะตรวจโดย

1. ส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์
2. ในรากต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
3. กำลังที่เป็นคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
4. ค่าสัมบูรณ์ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

Ex.6 กำหนด  $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{5x+3}{2x+4}\}$  จงหาโดเมนและเรนจ์วิธีตรง

Tip... ถ้าความสัมพันธ์มีเงื่อนไขของสมการเป็น  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  สามารถหาโดเมนและเรนจ์ด้วย  
สูตรลัด

$D_r = \dots\dots\dots$

$R_r = \dots\dots\dots$  เสมอ

Ex.7 ให้ความสัมพันธ์  $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+1}{x}\}$  เมื่อ R เป็นเซตของ

จำนวนจริงเรนจ์ของ r คือข้อใดต่อไปนี้ (En2)

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $R - \{1\}$                      | 2. $R - \{-1, 1\}$                  |
| 3. $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ | 4. $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ |

Ex.8 เรนจ์ของความสัมพันธ์  $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-2}\}$  คือข้อใด (En2)

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\{y \in R \mid y \neq 5\}$ | 2. $\{y \in R \mid y \neq -2\}$ |
| 3. $\{y \in R \mid y \neq 1\}$ | 4. $\{y \in R \mid y \neq -5\}$ |

Ex.9 จากความสัมพันธ์  $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 5 + \frac{5x+15}{x-5}\}$  จงหาเรนจ์

ของความสัมพันธ์

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $R_r = \{x \mid x \neq 10\}$ | 2. $R_r = \{x \mid x \neq 5\}$   |
| 3. $R_r = \{x \mid x \neq 0\}$  | 4. $R_r = \{x \mid x \neq -10\}$ |

Ex.10 จากความสัมพันธ์  $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 2xy - 3y = x - 5\}$  จงหาเรนจ์ของความสัมพันธ์

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 1. $R_r = \{x \mid x \neq 2\}$  | 2. $R_r = \{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$  |
| 3. $R_r = \{x \mid x \neq -2\}$ | 4. $R_r = \{x \mid x \neq -\frac{1}{2}\}$ |

**การหาค่าของฟังก์ชันขั้นพื้นฐาน**

ถ้าโจทย์บอกเงื่อนไขมาและให้หาค่าของฟังก์ชันจะทำได้โดยการแทนค่า  $x$  ลงในเงื่อนไข

**Ex.11** กำหนด  $g(x) = x^2 - 2x + 4$  จงหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.  $g(2) = \dots\dots\dots$
2.  $g(-3) = \dots\dots\dots$
3.  $g(x + 1) = \dots\dots\dots$

**Ex.12** ถ้า  $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$  แล้ว  $f(x+4)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (En2)

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. $\frac{2x+11}{x+2}$ | 2. $\frac{2x+11}{x-2}$ |
| 3. $\frac{2x+3}{x+2}$  | 4. $\frac{2x+3}{x-2}$  |

ถ้าโจทย์มีหลายเงื่อนไข ทำได้โดยการแทนค่า  $x$  ลงในเงื่อนไขให้ถูกต้อง

**Ex.13** ถ้า  $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 1 \\ 3x & ; 1 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & ; x > 4 \end{cases}$  แล้ว  $f(4) - f(7)$  คือ

ข้อใดต่อไปนี้ (En2)

- |      |      |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 4 |

**Ex.14** กำหนด  $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่

$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x > 2 \\ x^2+2 & , -4 \leq x \leq 2 \\ 9 & , x < -4 \end{cases}$  ค่าของ  $\frac{f(-7) + f(2)}{f(3)}$  ตรงกับข้อใด

- |      |       |
|------|-------|
| 1. 3 | 2. 15 |
| 3. 1 | 4. -2 |

### สูตรลดการหาค่าฟังก์ชันทั่วไป

1. สมมติให้กลุ่มตัวแปรฝั่งซ้ายเท่ากับ A และหาค่า x ในรูปของ A
  2. แทนค่าของ x ในรูปของ A ในฝั่งขวาของสมการจะเจอ  $f(A)$
  3. เมื่อเปลี่ยน A เป็น x คั้นจะเจอ  $f(x)$
- 

Ex.15 กำหนดให้  $f(2x + 1) = 3x - 1$  จงหา  $f(5)$

วิธีที่ 1

### สูตรการหาค่าฟังก์ชันของ JIA

ระบบ            เท่าหน้าแทนหลัง

ต่างระบบ      เท่าหลังแทนหน้า

Ex.15 กำหนดให้  $f(2x + 1) = 3x - 1$  จงหา  $f(5)$

วิธีที่ 2

Ex.16 กำหนด  $f(x + 3) = 2x^2 + 12x + 15$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| 1. $f(-1) = 1$ | 2. $f(0) = -3$  |
| 3. $f(1) = 2$  | 4. $f(-2) = -5$ |

ต่างระบบ      เท่าหลังแทนหน้า

Ex.17 ถ้า  $f(x) = 3x - 13$  แล้ว  $f^{-1}(2)$  มีค่าตรงกับข้อใด

- |      |      |
|------|------|
| 1. 5 | 2. 6 |
| 3. 7 | 4. 8 |

Ex.18 กำหนดให้  $f\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}x - 1$  จงหาว่า  $f^{-1}(2)$  ตรงกับข้อใด (EN1)

- |      |      |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 2 |
| 3. 4 | 4. 6 |

Ex.19 กำหนด  $f(5x - 1) = 3x - 7$  จงหา  $f(4) + f^{-1}(2)$

- |       |       |
|-------|-------|
| 1. 8  | 2. 10 |
| 3. 18 | 4. 20 |

Tip... การใช้สูตรลัดของ JIA ในการหาค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนจะสามารถใช้ได้กับโจทย์ทุกๆข้อ แต่เมื่อทำโจทย์เป็นจำนวนมากก็ควรรู้เพิ่มว่า โจทย์ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนมากควรจะลดทอนตัวแปรโดยการทำให้เป็น

.....  
ก่อนแล้วค่อยใช้สูตรลัด

Ex.20 ถ้า  $f(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$  ค่าของ  $f^{-1}(-6)$  คือข้อใดต่อไปนี้

- |       |                |
|-------|----------------|
| 1. -4 | 2. -1          |
| 3. 1  | 4. ไม่มีข้อถูก |