รายการโทรทัศน์เพื่อการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณิตศาสตร์

เซต ตอนที่ 1

โดย

อ.ไพศาล จรรยา

เซต ตอนที่ 1

เซตและสมาชิกของเซต

เซตเป็นคำ***อนิยาม***

ในทางคณิตศาสตร์ ใช้คำว่า เซต (Sets) เมื่อกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งของต่างๆ

เช่น เซตของเดือนในหนึ่งปี

เซตของจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว

ตัวอย่างข้างต้นเป็นส่วนหนึ่งของกลุ่มของที่ถือว่าเป็นเซต กลุ่มที่ไม่สามารถทราบได้แน่ชัดว่ามีสิ่งใดอยู่ในกลุ่มนี้บ้าง เราไม่เรียกกลุ่มที่กล่าวถึงนี้ว่าเป็นเซต

เช่น กลุ่มของคนสวย

กลุ่มนี้ไม่ถือว่าเป็นเซต เพราะไม่ทราบว่าคนสวยเหล่านี้คิดมาจากที่ใด และคำว่า “สวย” ไม่มีเกณฑ์วัดที่แน่นอน

ดังนั้น ถ้าจะกล่าวถึงเซต ต้องทราบแน่นอนว่ามีสิ่งใดบ้างอยู่ในเซตนั้น และจะเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า “สมาชิก” ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทนคำว่า “เป็นสมาชิก” และ $\notin$ แทนคำว่า “ไม่เป็นสมาชิก”

เช่น A เป็นเซตของจำนวนนับ

$1 \in A$

$9 \in A$

$-12 \notin A$

$0 \notin A$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ a, p, q, r \}$ และ $C = \{ 1, 2, 3 \}$

จงพิจารณาว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด

1. $a \in A$
2. $k \notin A$
3. $p \in B$
4. $s \in B$
5. $a \notin B$
6. $0 \notin C$
7. $2 \in B$
8. $3 \notin C$

ดังนั้น ข้อที่ถูก คือ 1, 2, 3 และ 6

วิธีการเขียนเซต

วิธีการเขียนเซต มี 2 แบบ

1. แบบแจกแจงสมาชิก เป็นวิธีการเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมาย วงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว

เช่น $A = \{b, c, d\}$ อ่านว่า A เป็นเซตที่มีสมาชิก b, c และ d เป็นสมาชิก

ในการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกนั้นจะใช้จุดสามจุด (...) เพื่อแสดงว่ามีสมาชิกอื่นๆ ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันทั่วไปว่ามีอะไรบ้างอยู่ในเซต

เช่น เซต A เป็นเซตของจำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว

เขียนได้เป็น $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ (มีสมาชิกมากไม่สิ้นสุด)

เซต B เป็นเซตของพยัญชนะภาษาไทยที่อยู่ในคำว่า “สุรินทร์“

เขียนได้เป็น B = {ส, ร, น, ท}

2. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก วิธีการเขียนแบบนี้ นิยมใช้ตัวแปร x , y หรือ z เขียนแทนสมาชิก แล้วเขียนส่วนที่อธิบายเกี่ยวกับเงื่อนไขของสมาชิก หรือตัวแปรดังกล่าว ว่ามีลักษณะอย่างไร โดยใช้เครื่องหมาย | คั่นระหว่างตัวแปร และประโยคที่บอกเงื่อนไข แล้วเขียนเครื่องหมายปีกกาคร่อม เครื่องหมาย | ใช้แทนคำว่า “โดยที่” หรือ “ซึ่ง”

เช่น เซต A เป็นเซตของจำนวนนับ

เขียนได้เป็น A = { x | x เป็นจำนวนนับ }

อ่านว่า A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นจำนวนนับ

เซต C เป็นเซตของจำนวนคี่ที่อยู่ระหว่าง 1 ถึง 10

เขียนได้เป็น C = { z | z เป็นจำนวนคี่ และ 1 < z < 10 }

อ่านว่า C เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก z โดยที่ z เป็นจำนวนคี่ และ z อยู่ระหว่าง 1 กับ 10

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ในกรณีทั่วไป นิยมใช้

ภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ ได้แก่ A, B, C, …, Z แทนเซต

ภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก ได้แก่ a, b, c, …, z แทนสมาชิกของเซต

เพื่อความสะดวกในการใช้สัญลักษณ์ แทนเซตของจำนวนต่างๆ ดังนั้น

I แทน เซตของจำนวนเต็ม

I^- แทน เซตของจำนวนเต็มลบ

I^+ แทน เซตของจำนวนเต็มบวก

N แทน เซตของจำนวนนับ

R แทน เซตของจำนวนจริง

R^- แทน เซตของจำนวนจริงลบ

R^+ แทน เซตของจำนวนจริงบวก

Q แทน เซตของจำนวนตรรกยะ

Q^- แทน เซตของจำนวนตรรกยะลบ

Q^+ แทน เซตของจำนวนตรรกยะบวก

P แทน เซตของจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1. N = {1, 2, 3, 4,…}
2. I+ = {1, 2, 3, 4,…}
3. I- = {1, 2, 3,…}

4. I = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

5. P = {2, 3, 5, 7, 11, 13,...}

เอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้นนี้

โดยทั่วไปนิยมใช้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

$A = \{X \in I \mid X^2 + 3X - 10 = 0\}$ แสดงว่า U = I

$B = \{X \in I^+ \mid X^2 + 3X - 10 = 0\}$ แสดงว่า $U = I^+$

หมายเหตุ

ถ้ากล่าวถึงเซตของจำนวนและไม่ได้กำหนดว่าเซตใดเป็นเอกภพสัมพัทธ์ ในระดับชั้นนี้ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของ**จำนวนจริง**

เช่น $A = \{x \mid x^2 - 2x = 0\}$ แสดงว่า U= R

การเท่ากันของเซต เซต A จะเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกัน กล่าวคือ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A ใช้สัญลักษณ์ A = B

เช่น A = {2, 5, 7}, B = {2, 5, 7, 7} ถ้ามีสมาชิกซ้ำกันให้คิดเป็นสมาชิกตัวเดียว

ดังนั้น A = B

ถ้าเซต A ไม่เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A \neq B$ หมายความว่า มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B หรือ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต B ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต A

เช่น กำหนดให้ A = {2, 3} และ B = {2, 4, 5}

จะได้ $A \neq B$

เพราะว่า เซต A มี 2 และ 3 เป็นสมาชิก

แต่ เซต B มี 2 , 4 และ 5 เป็นสมาชิก

ซึ่งจะสังเกตได้ว่าสมาชิกในเซต A กับ B มีลักษณะแตกต่างกัน ซึ่ง 3 เป็นสมาชิกของ A แต่ 3 ไม่เป็นสมาชิกของ B

เซตที่เทียบเท่า เซต A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับจำนวนสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ หรือ $A \leftrightarrow B$

เช่น A = { 1, 3 } ,B = { a, b }

จะได้ว่า n(A) = 2 และ n(B) = 2 ซึ่ง n(A) = n(B) = 2

ดังนั้น $A \sim B$

เซตจำกัด

เรียกเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือ ศูนย์ว่า **เซตจำกัด**

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 6

$B = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $x - 4 = 2\}$ มีจำนวนสมาชิก เท่ากับ 1

$C = \{ \}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์

$D = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$ มีจำนวนสมาชิก 50 ตัว

$E = \{ x \in N \mid x < 1{,}000{,}000 \}$ มีจำนวนสมาชิก 999,999 ตัว

เซตอนันต์

เรียกเซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัดว่า **เซตอนันต์** กล่าวคือสมาชิกของเซตอนันต์มีจำนวนมากไม่สิ้นสุด

เช่น $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนนับ$\}$

$B = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$C = \{ x \mid x \in I^{+}$ และ $x > 2 \}$

เซตว่าง

เซตจำกัดที่ไม่มีสมาชิก หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ เรียกว่า **เซตว่าง** สัญลักษณ์ ϕ หรือใช้สัญลักษณ์ { }

เช่น $A = \{ x \mid x \neq x\}$

$B = \{ x \in R \mid x < x\}$

$C = \{ x \in I^{+} \mid x < 1 \}$

$D = \{ x \mid x$ เป็นเดือนที่มี 33 วัน$\}$

ดังนั้น เซตว่างเป็นเซตจำกัด

<u>หมายเหตุ</u>

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย **n(A)**

$A = \{-5, 2\}$; $n(A) = 2$

$B = \{12345\}$; $n(B) = 1$

$C = \phi$; $n(C) = 0$

$D = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1$\} = \{ \}$; $n(D) = 0$

สับเซต

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

A เป็นสับเซตของเซต B **เขียนแทนด้วย** $A \subset B$

ถ้ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B แล้วเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B **เขียนแทนด้วย** $A \not\subset B$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า A มีสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A คือ 2^n

สมบัติของสับเซต

1) $\phi \subset A$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ
2) $A \subset A$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ
3) $A \subset U$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์
4) ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด และ $A \subset B$ แล้ว $n(A) \le n(B)$
5) ถ้า $A \subset \phi$ แล้ว $A = \phi$
6) ถ้า A มีสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตของ A จะมี 2^n สับเซต
7) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

สับเซตแท้

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ A เป็นสับเซตแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ A เป็นสับเซตของ B และมีสมาชิกบางตัวของ B ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ A

ข้อสังเกต ถ้า A **มีสมาชิก** n **ตัว แล้ว จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของ** A **คือ** $2^n - 1$

เพาเวอร์เซต

เรียกเซตของสับเซตทั้งหมดของ A ว่า **เพาเวอร์เซตของเซต A**
เขียนแทนด้วย P(A) กล่าวคือ เพาเวอร์เซตของเซต A หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสับเซตของ A ทุกสับเซต

นั่นคือ $P(A) = \{x \mid x \subset A\}$

ตัวอย่างที่ 1

จะพบว่าสับเซตของ A จะประกอบด้วย $\varnothing, \{1\}, \{2\}$ และ $\{1,2\}$
ถ้านำสับเซตเหล่านี้ ไปเป็นสมาชิกของเซตใหม่ ดังนี้ $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
เรียกเซตใหม่นี้ว่า เพาเวอร์เซตของ

ข้อสังเกต

จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A ก็คือ จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A
ถ้า A มีสมาชิก n ตัว แล้ว $n(P(A)) = 2^n$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

1) $P(\phi) = \{\phi\}$
2) $P(A) \neq \phi$
3) $\phi \in P(A)$
4) $A \in P(A)$
5) ถ้าเซต A มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ k แล้วจำนวนสมาชิกของ P(A) เท่ากับ 2^k
6) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว P(A) เป็นเซตอนันต์

ข้อสังเกต

ϕ เป็นสมาชิกร่วมของทุก ๆ เพาเวอร์เซต แม้กระทั่ง $A = \phi$ จะมี $\phi \in P(A)$ แสดงว่า สำหรับทุกเซต A แล้ว $\phi \in P(A)$ เสมอ

แนวข้อสอบเรื่องเซต

ให้นักศึกษาเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. พิจารณา $A = \{1, 2, 34, 5\}$ ดังนั้น ข้อใดไม่เป็นสมาชิกของ A

ก. 1   ข. 2

ค. 3   ง. 5

แนวคิด

พิจารณา $A = \{1, 2, 34, 5\}$

A มีสมาชิก 4 ตัว ได้แก่ 1, 2, 34 และ 5

2. ข้อใดเป็นเซตของจำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว

ก. {2, 4, 6, 8, 10, …}   ข. {2, 4, 6, 8, 10 }

ค. {0, 2, 4, 6, 8, 10, …}   ง. {..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, …}

แนวคิด

จำนวนนับ ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, ...

จำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว ได้แก่ 2, 4, 6, 8, 10, ...

ดังนั้น เซตของจำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว คือ {2, 4, 6, 8, 10, …}

3. พิจารณา $C = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนคี่ และ $1 < x < 11 \}$ ดังนั้น C เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ตรงกับข้อใด

ก. { 1, 3, 5, 7, 9, 11}   ข. { 1, 3, 5, 7, 9 }

ค. { 3, 5, 7, 9 }   ง. { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

แนวคิด

พิจารณา $C = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนคี่ และ $1 < x < 11 \}$

C มีสมาชิก 4 ตัว ได้แก่ 3, 5, 7 และ 9

ดังนั้น C = { 3, 5, 7, 9 }

4. กำหนด A = {1, 3, 5} ดังนั้น A ไม่เท่ากับเซตในข้อใด

ก. {1, 1, 3, 5}   ข. {5, 3, 1}

ค. {135}   ง. {1, 5, 3, 3, 1 }

แนวคิด

เซต A จะเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกัน กล่าวคือ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A ใช้สัญลักษณ์ A = B

เช่น A = {1, 3, 5}, B = {1, 1, 3, 5} ถ้ามีสมาชิกซ้ำกันให้คิดเป็นสมาชิกตัวเดียว

ดังนั้น A = B

เนื่องจาก A = {1, 3, 5}

จะเห็นว่า A มีสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ 1 ,3 และ 5

ดังนั้น ข้อที่ไม่เท่ากับเซต A คือ ข้อ ค

5. กำหนด A = { 1, 3 } ดังนั้น A เทียบเท่ากับเซตในข้อใด

ก. B = { 2, 4, 5 } ข. C = { 2, 5 }

ค. D = { 3, 3 } ง. E = { 13 }

แนวคิด

A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับจำนวนสมาชิกของเซต B

พิจารณา

B = { 2, 4, 5 } , n(B) = 3

C = { 2, 5 } , n(C) = 2

D = { 3, 3 } , n(D) = 1

E = { 13 } , n(E) = 1

ดังนั้น ข้อ ข ถูกต้อง

6. ข้อใดเป็นเซตว่าง

ก. $A = \{ x \in R \mid x + x = x\}$ ข. $B = \{ x \in R \mid x - x = x\}$

ค. $C = \{ x \in R \mid x < x\}$ ง. $D = \{ x \in R \mid x2 = x\}$

แนวคิด

ก.
$$x + x = x$$
$$2x = x$$
$$2x - x = x - x$$
$$x = 0$$
$$\therefore A = \{0\}$$

ข.
$$x - x = x$$
$$0 = x$$
$$\therefore B = \{0\}$$

ค.
$$x < x$$
$$x - x < x - x$$
$$0 < 0 \quad \text{เป็นเท็จ}$$
$$\therefore C = \varnothing$$

ง.
$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 1 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{หรือ} \quad x = 1$$
$$\therefore D = \{0, 1\}$$

ดังนั้นข้อ ค. เป็นเซตว่าง

7. ข้อใดเป็นเซตจำกัด

ก. เซตของจำนวนนับ

ข. เซตของจำนวนเต็มบวกที่ 3 หารได้ลงตัว

ค. เซตของจำนวนคู่บวก

ง. เซตของจำนวนคี่บวกที่น้อยกว่า 100

แนวคิด

ก. เซตของจำนวนนับ คือ $\{1,2,3,4,\ldots\}$ เป็นเซตอนันต์

ข. เซตของจำนวนเต็มบวกที่ 3 หารได้ลงตัว คือ$\{3,6,9,12,\ldots\}$ เป็นเซตอนันต์

ค. เซตของจำนวนคู่บวก คือ $\{2,4,6,8,\ldots\}$ เป็นเซตอนันต์

ง. เซตของจำนวนคี่บวกที่น้อยกว่า 100 คือ $\{1,3,5,7,9,\ldots,99\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น ข้อ ง. เป็นเซตจำกัด

8. ข้อใดเป็นเซตอนันต์

ก. $A=\{x|x+x=4x\}$

ข. $B=\{x|x+1=5\}$

ค. $C=\{x|x+2>2\}$

ง. $D=\{x|3x=6\}$

แนวคิด

ก.
$$x+x=4x$$
$$2x=4x$$
$$2x-2x=4x-2x$$
$$0=2x$$
$$\frac{0}{2}=\frac{2x}{2}$$
$\therefore x=0$

ดังนั้น $A=\{0\}$ เป็นเซตจำกัด

ค.
$$x+2>2$$
$$x+2-2>2-2$$
$$x>0$$
$\therefore x$ เป็นจำนวนจริงใดๆที่มากกว่า 0

ดังนั้น C เป็นเซตอนันต์

ข.
$$x+1=5$$
$$x+1-1=5-1$$
$$x=4$$
ดังนั้น $B=\{0\}$ เป็นเซตจำกัด

ง.
$$3x=6$$
$$\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$$
$$x=2$$
$\therefore D=\{2\}$

ดังนั้น D เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น ค. ถูกต้อง

9. พิจารณา A = { 2, 3 }เซตในข้อใด <u>ไม่เป็น</u>สับเซต ของ A

ก. $\varnothing$ ข. 2

ค. $\{2\}$ ง. $\{3\}$

แนวคิด

$A=\{2,3\}$ $n(A)=2$

ดังนั้นสับเซตของ A มี $2^{n(A)}=2^2$

$=4$ ตัว

ดังนั้นสับเซตของ A ได้แก่ $\varnothing,\{2\},\{3\}$ และ $\{2,3\}$

ดังนั้น 2 ไม่เป็นสับเซตของ A

10. กำหนด A = { 1,2 } ดังนั้น P(A) ตรงกับข้อใด

ก. $\{1,2\}$ ข. $\{\varnothing,1,2\}$

ค. $\{\varnothing,\{1\},\{2\}\{1,2\}\}$ ง. $\{\{\varnothing\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

แนวคิด

$P(A)=$ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A

สับเซตของ A ได้แก่ $\varnothing,\{1\},\{2\}$ และ $\{1,2\}$

ดังนั้น $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\{1,2\}\}$