รายการโทรทัศน์เพื่อการศึกษา
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณิตศาสตร์
เซต ตอนที่ 2

โดย

อ.ไพศาล จรรยา

เซต ตอนที่ 2

เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe)

บทนิยาม เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้นนี้

โดยทั่วไปนิยมใช้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

เช่น กำหนดให้ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = { x| x เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ }

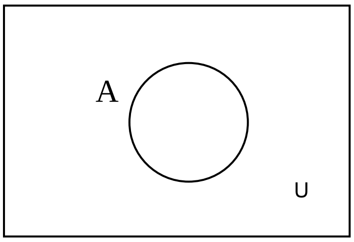
B = {1, 5, 7, 9 }

นั่นคือ ทั้งเซต A และ B เป็นสับเซตของ U

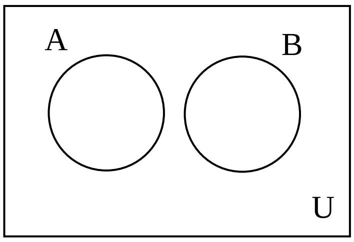
เพื่อให้การศึกษาเกี่ยวกับเรื่องเซตง่าย และเข้าใจยิ่งขึ้น จึงมีการใช้แผนภาพที่ใช้แทนเซต ซึ่งนักคณิตศาสตร์ 2 ท่าน คือ จอห์น เวนน์ (John Venn, พ.ศ. 2377 - 2466) ชาวอังกฤษ และ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler, พ.ศ. 2250 - 2326) ชาวสวิส ได้คิดแผนภาพเพื่อแสดงเกี่ยวกับเรื่องเซตขึ้นมา และเรียกแผนภาพนี้ว่า **"แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ "**

การเขียนแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ เริ่มต้นด้วยการใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แทนเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้วงกลมหรือวงรี หรือรูปปิดใดๆ แทนเซต A, B, C, … ซึ่งเป็นสับเซตของ U

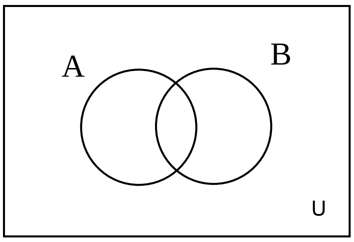
แผนภาพแสดงเอกภพสัมพัทธ์ U



แผนภาพแสดงเซต A ซึ่ง $A \subset U$



แผนภาพแสดงเซต A และ B ซึ่งเป็นสับเซตของ U และเป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย



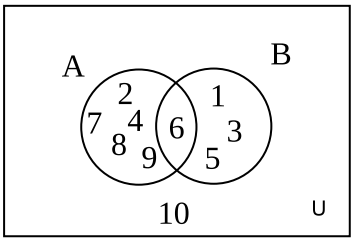
แผนภาพแสดงเซต A และเซต B ซึ่งเป็นสับเซตของ U โดยที่ A และ B มีสมาชิกบางตัวซ้ำกัน แต่ $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ U = {1, 2, 3, …, 10}

A = {2, 4, 6, 7, 8, 9}

B = {1, 3, 5, 6}

จงเขียนแผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์ แทนเซตที่กำหนดให้ ดังนี้



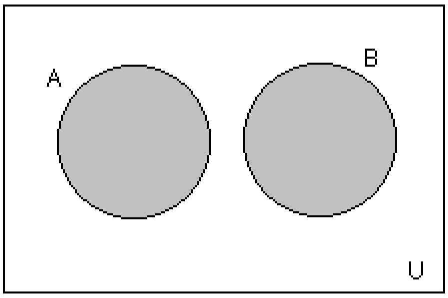
จะได้ว่า เซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกันอยู่ 1 ตัว คือ 6

ยูเนียน

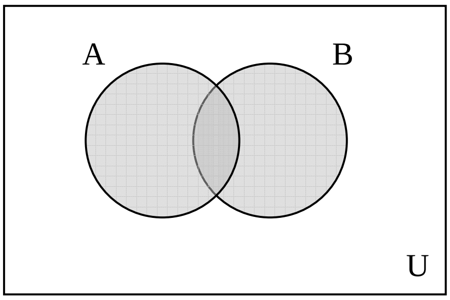
ถ้า A และ B เป็นเซต 2 เซต ยูเนียนของ A และ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเซต A หรือของเซต B หรือทั้งเซต A และเซต B ก็ได้ และใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$ แทนเซตดังกล่าว

นั่นคือ $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B \}$

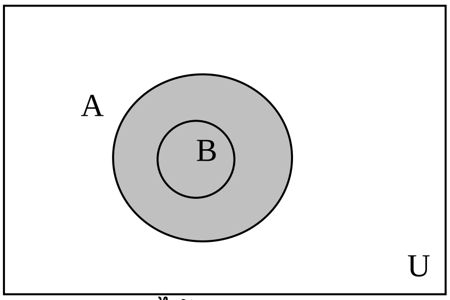
บริเวณที่แรเงาในแผนภาพต่อไปนี้ แสดงเซต $A \cup B$ ในรูปแบบต่างๆ



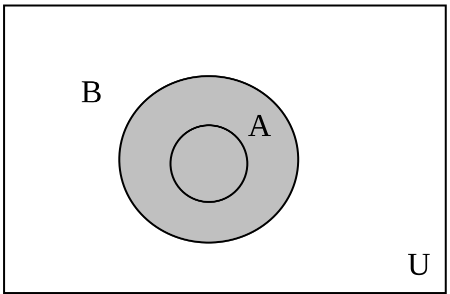
เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



เซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกัน



$B \subset A$ จะได้ว่า $A \cup B = A$



$A \subset B$ จะได้ว่า $A \cup B = B$

สมบัติที่สำคัญของยูเนียน

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cup \phi = A$, $A \cup U = U$

5. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

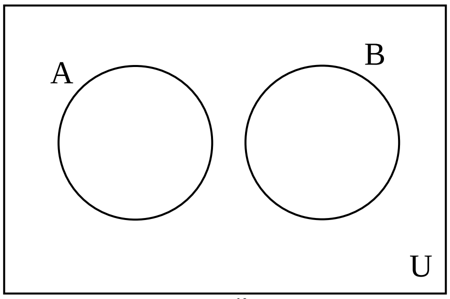
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 5, 6\}$
ดังนั้น $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

อินเตอร์เซกชัน

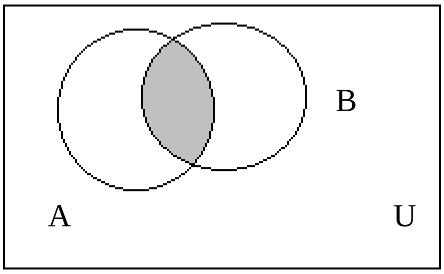
อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกทั้งของเซต A และเซต B ใช้สัญลักษณ์ $A \cap B$

นั่นคือ $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

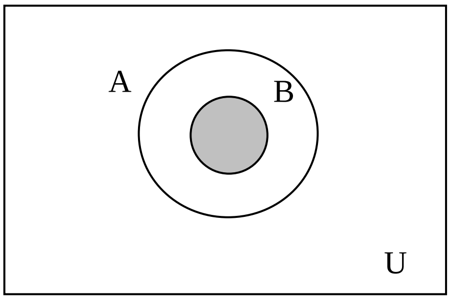
บริเวณที่แรเงาในแผนภาพต่อไปนี้ แสดงเซต $A \cap B$ ในรูปแบบต่างๆ



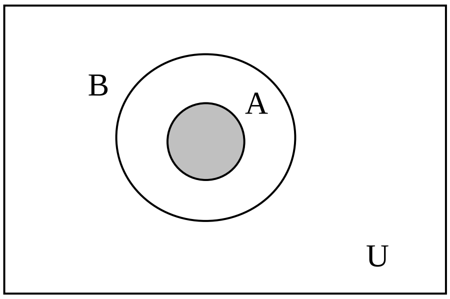
เซต A และ เซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน
จะได้ว่า $A \cap B = \phi$



เซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกัน



$B \subset A$ จะได้ว่า $A \cap B = B$



$A \subset B$ จะได้ว่า $A \cap B = A$

สมบัติที่สำคัญของอินเตอร์เซคชัน

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap \phi = \phi$, $A \cap U = A$
5. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ และ $C = \{1, 2, 3, 7\}$

จงหา 1. $A \cap A$ 4. $A \cap (B \cap C)$

2. $A \cap B$ 5. $(A \cap B) \cap C$

3. $B \cap A$

วิธีทำ 1. $A \cap A = \{1, 2, 3\}$

$A \cap A = A$

2. $A \cap B = \{2, 3\}$

3. $B \cap A = \{2, 3\}$

จากข้อ 1. และ 2. จะได้ $A \cap B = B \cap A$

4. $A \cap (B \cap C) = A \cap \{2, 3, 7\}$

$= \{2, 3\}$

5. $(A \cap B) \cap C = \{2, 3\} \cap C$

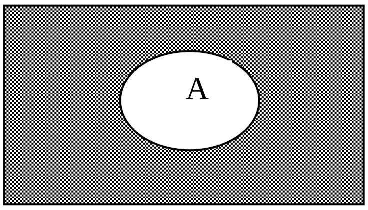
$= \{2, 3\}$

จากข้อ 4. และ 5. จะได้ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

คอมพลีเมนต์ (Complement)

คอมพลีเมนต์ของเซต A ซึ่งเป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A ใช้สัญลักษณ์ A' หรือ A^C แทนคอมพลีเมนต์ของเซต A

ส่วนที่แรเงาในแผนภาพนี้เป็นคอมพลีเมนต์ของ A ซึ่งเขียนในรูป



สมบัติที่สำคัญของคอมพลีเมนต์

1. $(A')' = A$
2. $\phi' = U$ และ $U' = \phi$
3. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
4. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
5. $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$
6. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{3, 4, 6, 7, 8\}$

$B = \{1, 4, 7, 10\}$

จงหา 1. A'

2. B'

วิธีทำ 1. จากเซต U , A = {3, 4, 6, 7, 8} ที่กำหนดให้

จะได้ $A' = \{1, 2, 5, 9, 10\}$

2. จาก $B = \{1, 4, 7, 10\}$

และ $B' = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}$

ผลต่าง

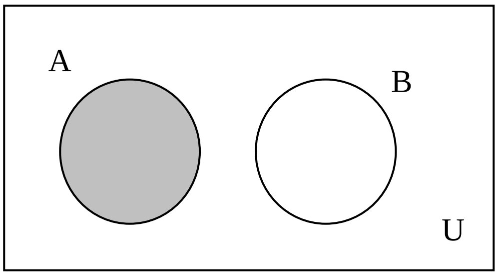
ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต B และ **ใช้สัญลักษณ์ A – B** แทนเซตของผลต่างของเซต A และเซต B

นั่นคือ $A - B = \{x \,/\, x \in A$ แต่ $x \notin B\}$

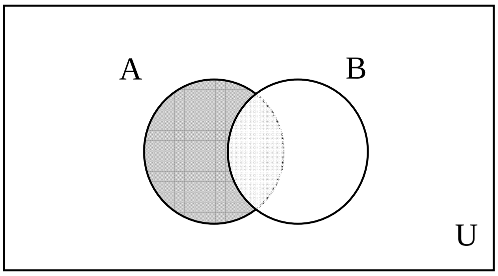
เช่น ให้ A = {2, 4, 6, 8} และ B = {1, 2, 3, 4}

ดังนั้น A – B = { 6, 8 }

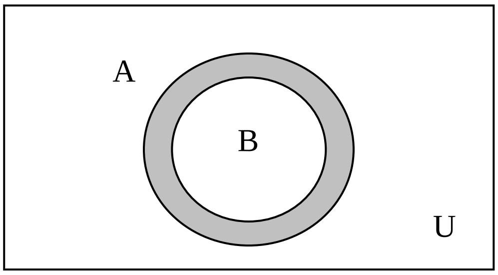
ส่วนที่แรเงาในแผนภาพต่อไปนี้ แสดงเซต A – B ในรูปแบบต่างๆ



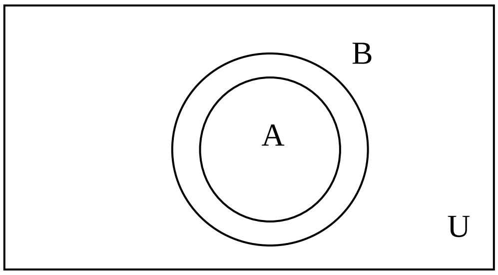
$A - B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \phi$



$A - B$ เป็นสับเซตของ A ก็ต่อเมื่อ $A \cap B \neq \phi$



B เป็นสับเซตของ A



$A - B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$

สมบัติที่สำคัญของผลต่าง

1. $A - B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$
2. $A - B = A \cap B'$
3. $A - \phi = A$ และ $\phi - A = \phi$
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

   $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
5. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

   $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
6. $A' - B' = B - A$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

A = { 1, 3, 5, 7, 9, 10 }

B = { 3, 7, 9 }

จงหา 1. A – B

2. A – A

วิธีทำ 1. จากเซต A และเซต B ที่กำหนดให้

ดังนั้น A – B = { 1, 5, 10 }

2. จากเซต A ที่กำหนดให้

A – A = ϕ

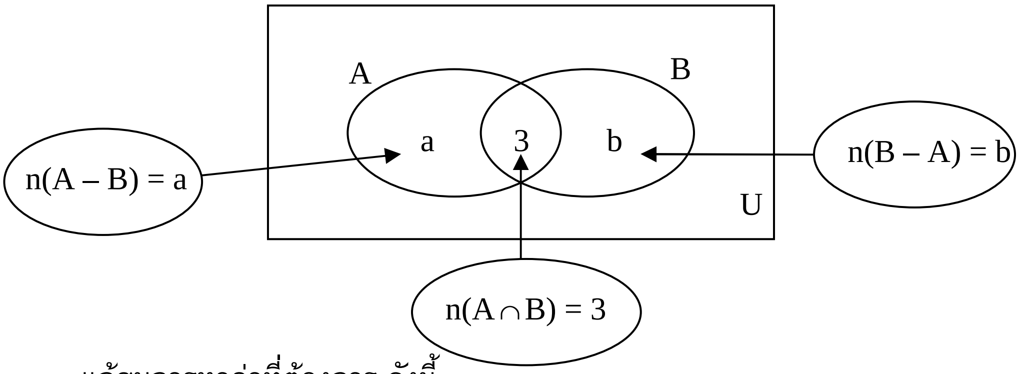
1. การหาจำนวนสมาชิกของเซตโดยใช้แผนภาพ

1) ให้เขียนแผนภาพแทนเซตพร้อมทั้งแสดงจำนวนสมาชิกของเซตลงในส่วนต่างๆ ทุกส่วนที่ไม่ซ้ำซ้อนกัน ส่วนใดที่ไม่ทราบค่าให้สมมุติเป็นตัวแปรแทนลงไป
2) หาค่าที่ต้องการบางครั้งอาจต้องแก้สมการ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด n(A) = 5 , n(B) = 6 , n(A$\cap$B) = 3 จงหา

1. n(A – B)
2. n(A$\cup$B)
3. n(B – A)

วิธีทำ เขียนแผนภาพพร้อมทั้งแสดงจำนวนสมาชิกของเซตในส่วนต่างๆ ของแผนภาพ



แก้สมการหาค่าที่ต้องการ ดังนี้

1. จาก a + n(A $\cap$B) = n(A)

   จะได้ a + 3 = 5

   ดังนั้น a = 5 – 3 = 2

   นั่นคือ n(A – B) = 2

2. จาก b + n(A $\cap$B) = n(B)

   จะได้ b + 3 = 6

   ดังนั้น b = 6 – 3 = 3

   นั่นคือ n(B – A) = 3

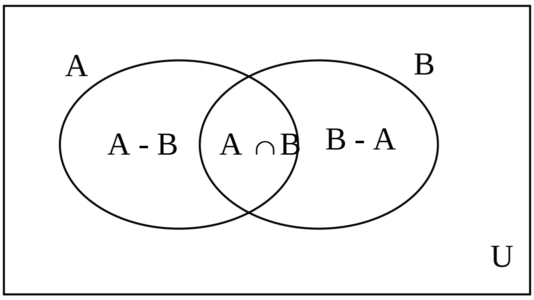
3. $n(A \cup B) = a + 3 + b$

$= 2 + 3 + 3$

2. การหาจำนวนสมาชิกโดยใช้สูตร

3) ถ้า A , B เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$



4) ถ้า A , B เป็นเซตจำกัดแล้ว

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ เมื่อ $A \cap B = \phi$

5) ถ้า A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U และ U เป็นเซตจำกัดแล้ว

$n(A') = n(U) - n(A)$

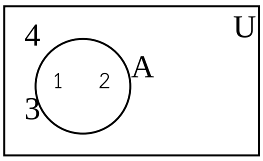
แนวข้อสอบเรื่องเซต

ให้นักศึกษาเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

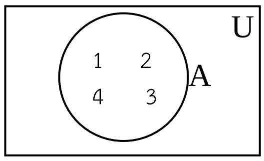
1. กำหนด U = {1, 2, 3, 4} ; A = {1, 2}

ข้อใดเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ แทนเซต U และ A ได้ถูกต้อง

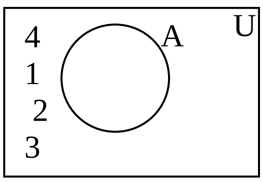
ก.



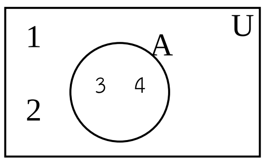
ข.



ค.



ง.

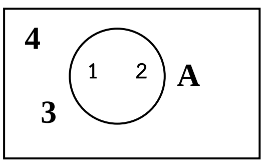


แนวคิด

$A = \{1, 2\}$ มีสมาชิก 2 ตัว ได้แก่ 1 และ 2

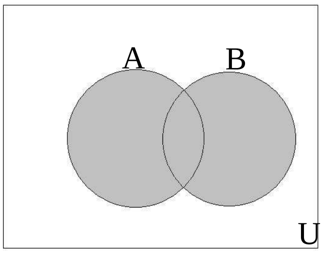
$U = \{1, 2, 3, 4\}$ มีสมาชิก 4 ตัว ได้แก่ 1, 2, 3, และ 4

จะได้

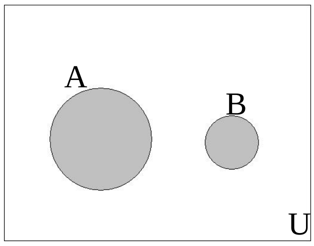


2. แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ต่อไปนี้ ข้อใด<u>ไม่แสดง</u>ว่า $A \cup B$

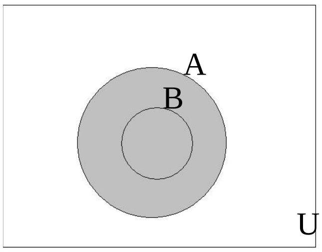
ก.



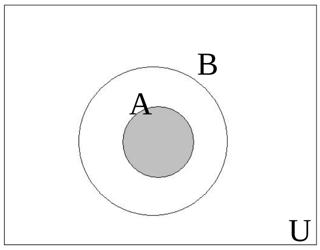
ข.



ค.



ง.



แนวคิด

แผนภาพเวนน์- ออยเลอร์ ของ $A \cup B$

โดยการแรเงา A และ B ทั้งหมด

ดังนั้น ข้อที่ไม่แสดงว่าเป็น $A \cup B$ คือ ข้อ ง.

3. ให้ U = { x| x เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10}

A = {3, 5, 7, 9}

B = {3, 7, 8, 9}

ข้อใดเขียน $A \cap B$ แบบแจกแจงสมาชิกได้**<u>ถูกต้อง</u>**

ก. {3, 7}

ข. {3, 5, 7, 8, 9}

ค. {3, 7, 9}

ง. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

แนวคิด

$A \cap B$ หาจากสมาชิกที่ซ้ำกันระหว่าง A กับ B

ดังนั้น $A \cap B = \{3,7,9\}$

4. ถ้า U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} และ A={ 1, 2, 3 } จงหา A'

ก. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

ข. {1, 2, 3}

ค. {4, 5, 6, 7}

ง. { 2, 3, 4, 5, 6, 7}

แนวคิด

A' หาจากสมาชิกนอก A

จะได้ $A' = \{4,5,6,7\}$

5. กำหนดให้ A = {m, n, d} , B= {m} ข้อใดคือ A – B

1. {m}
2. {m, n}
3. {m, n, d}
4. {A, B}

แนวคิด

$A-B$ หาจากสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

จะได้ $A-B=\{n,d\}$

6. กำหนดให้ U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ,A = {2, 4, 6, 8} , B= {1, 2, 3, 4} ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**

ก. A – B = {6, 8}
ข. A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6, 8}
ค. A′ = {1, 3, 5, 7, 8}
ง. A ∩ B = {2, 4}

แนวคิด

ก. $A-B$ หาจากสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

จะได้ $A-B=\{6,8\}$

ดังนั้น ก.ถูกต้อง

ข. $A\cup B$ หาจากสมาชิกที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B

จะได้ $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

ดังนั้น ข.ถูกต้อง

ค. A' หาจากสมาชิกที่อยู่นอก A

จะได้ $A'=\{1,3,5,7\}$

ดังนั้น ค. ไม่ถูกต้อง

ง. $A\cap B$ หาจากสมาชิกซ้ำกันระหว่าง A กับ B

จะได้ $A\cap B=\{2,4\}$

ดังนั้น ง. ถูกต้อง

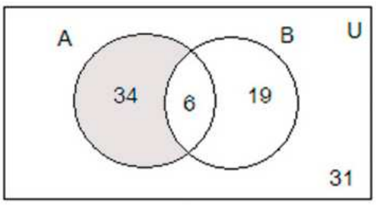
กำหนดจำนวนสมาชิกของเซต U, A, B และ A∩B เท่ากับ 100, 40, 25 และ 6 ตามลำดับ พิจารณาเพื่อตอบคำถามข้อ 7 – 9

7. จำนวนสมาชิกของ A – B เท่ากับเท่าใด

ก. 30
ข. 32
ค. 34
ง. 36

แนวคิด

เขียนเป็นแผนภาพเวนน์- ออยเลอร์ ได้ดังนี้



A – B คือส่วนที่แรเงา

ดังนั้น n(A –B) = 34

8. จำนวนสมาชิกของ A′ เท่ากับเท่าใด

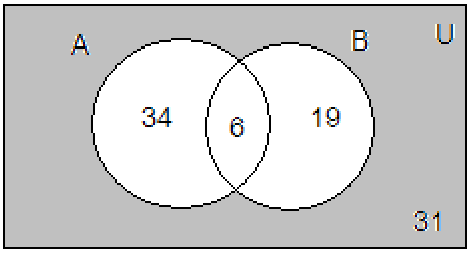
ก. 60 ข. 62

ค. 64 ง. 66

แนวคิด

A' หาจากสมาชิกนอก A

จะได้รูปที่แรเงา



ดังนั้น $n(A') = 60$

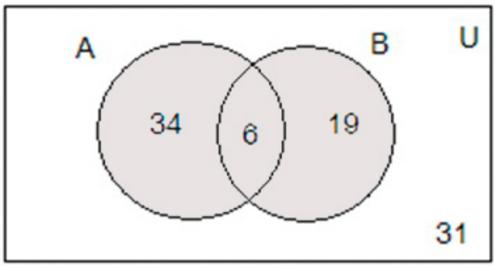
9. จำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

ก. 57 ข. 59

ค. 61 ง. 63

แนวคิด

เขียนเป็นแผนภาพเวนน์- ออยเลอร์



จะได้ $n(A \cup B) = 59$

10. กำหนดให้ U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12} , A = {1, 2, 3, 6, 8} , B= {1, 2, 3, 4} ข้อใด**<u>ถูกต้อง</u>**

ก. $n(A \cup B) = 9$ ข. $n(A - B) = 2$

ค. $n(A \cap B) = 4$ ง. $n(B') = 8$

แนวคิด

ก. $A \cup B$ หาจากสมาชิกที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B

จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

ดังนั้น $n(A \cup B) = 6$

$\therefore$ ก. ไม่ถูกต้อง

ข. $A - B$ หาจากสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

จะได้ $A - B = \{6, 8\}$

ดังนั้น $n(A - B) = 2$

$\therefore$ ข. ถูกต้อง

ค. $A \cap B$ หาจากสมาชิกที่ซ้ำกัน

จะได้ $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

ดังนั้น $n(A \cap B) = 3$

$\therefore$ ค. ไม่ถูกต้อง

ง. B' หาจากสมาชิกที่อยู่นอก B

จะได้ $B' = \{5, 6, 7, 8, 9, 12\}$

ดังนั้น $n(B') = 6$

$\therefore$ ง. ไม่ถูกต้อง