



รายการโทรทัศน์เพื่อการศึกษา
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณิตศาสตร์
ตรีโกณมิติ ตอนที่ 1

โดย
อ.กนกวลี อุษณกรกุล

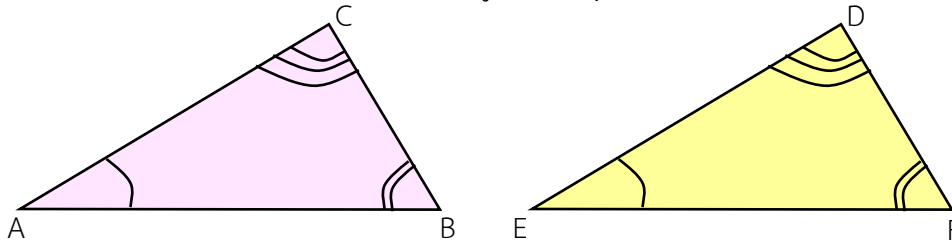
เรื่องตรีโกณมิติ ตอนที่ 1

1. รูปสามเหลี่ยมคล้าย

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูป เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายก็ต่อเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีมุมสามมุมเท่ากัน มุมต่อมุม

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

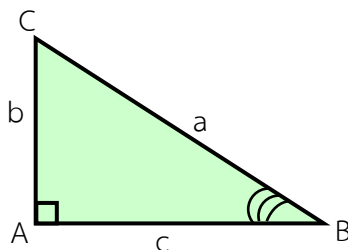
อัตราส่วนของความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากันย่อมเท่ากัน



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ จะได้ } \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DF} = \frac{CA}{DE}$$

2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ข้อตกลงเกี่ยวกับการเรียกชื่อ



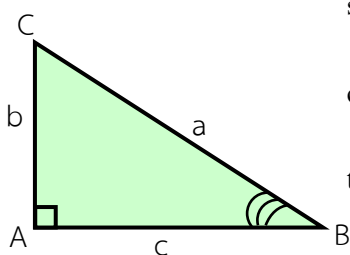
ถ้ามุม A เป็นมุมฉาก และสนใจมุม B

เรียกด้าน BC ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก แทนความยาวด้วย a

เรียกด้าน AC ว่า ด้านตรงข้ามมุม B แทนความยาวด้วย b

เรียกด้าน AB ว่า ด้านประชิดมุม B แทนความยาวด้วย c

ดังนั้นเราจะได้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ดังนี้



$$\text{sine ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{a} \text{ เขียนย่อเป็น } \sin B$$

$$\text{cosine ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{c}{a} \text{ เขียนย่อเป็น } \cos B$$

$$\text{tangent ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}} = \frac{b}{c} \text{ เขียนย่อเป็น } \tan B$$

$$\text{cotangent ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}} = \frac{c}{b} \text{ เขียนย่อเป็น } \cot B$$

$$\text{secant ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}} = \frac{a}{c} \text{ เขียนย่อเป็น } \sec B$$

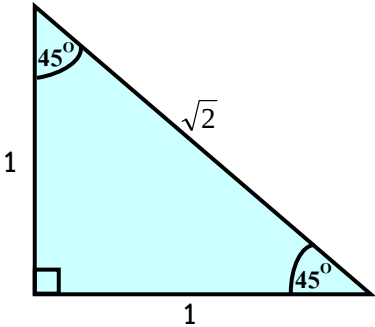
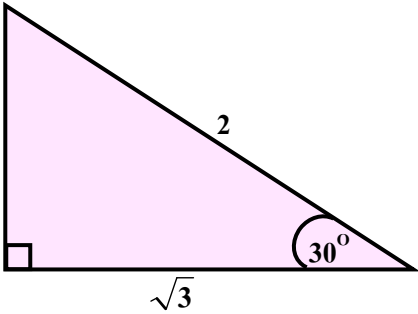
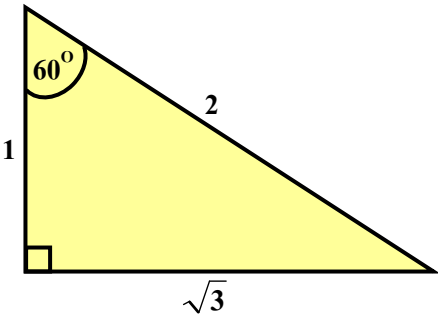
$$\text{cosecant ของมุม B} = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}} = \frac{a}{b} \text{ เขียนย่อเป็น } \text{cosec B}$$

หรือ $\csc B$

ข้อสังเกต ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และสำหรับมุม B ใดๆ ใน Δ มุมฉาก ABC มีค่าอยู่ระหว่าง 0° ถึง 90° ($0^\circ < B < 90^\circ$) จะได้

1. $0 < \sin B < 1$
2. $0 < \cos B < 1$
3. $\operatorname{cosec} B > 1$
4. $\sec B > 1$
5. $\tan B$ และ $\cot B$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

3.อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

รูป	$\sin 45^\circ$	$\cos 45^\circ$	$\tan 45^\circ$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	$\sin 30^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\tan 30^\circ$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	$\sin 60^\circ$	$\cos 60^\circ$	$\tan 60^\circ$
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

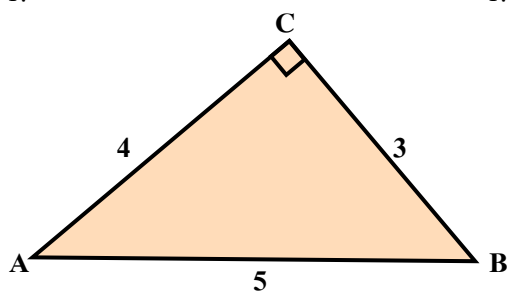
ตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

มุม อัตราส่วน	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

แนวข้อสอบเรื่องตรีโกณมิติ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1.



1. จากรูปที่กำหนด อัตราส่วนใดถูกต้อง

ก. $\sin A = \frac{3}{4}$

ข. $\cos A = \frac{3}{5}$

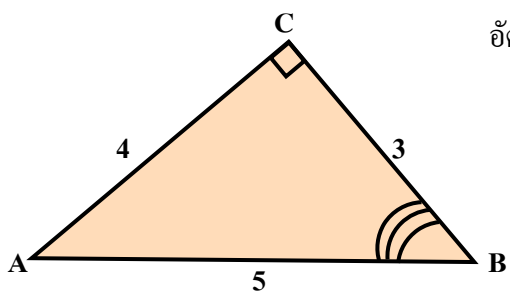
ค. $\sin B = \frac{4}{5}$

ง. $\cos B = \frac{3}{4}$

เทคนิคการทำ จำอัตราส่วนตรีโกณมิติให้ได้

เฉลย ค

แนวคิด



อัตราส่วนที่ถูกต้องคือ $\sin B$

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\ &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

2. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก $AB = 8$ นิ้ว $BC = 5$ นิ้ว ข้อใดต่อไปนี้กล่าวผิด

ก. $\sin C = \frac{8}{\sqrt{89}}$

ข. $\cos C = \frac{5}{\sqrt{89}}$

ค. $\tan C = \frac{8}{5}$

ง. $\sec C = \frac{\sqrt{89}}{8}$

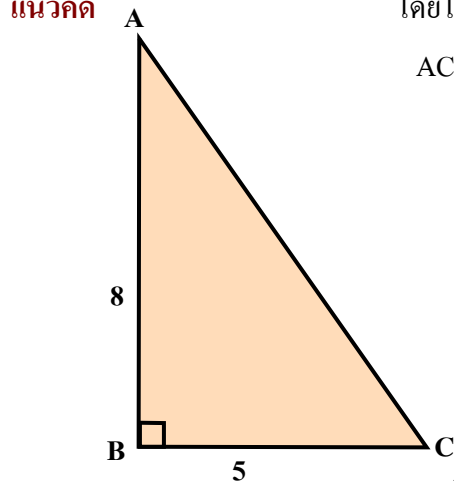
เทคนิคการทำ วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและจำอัตราส่วนตรีโกณมิติให้ได้

เฉลย ง

แนวคิด

โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 8^2 + 5^2 \\ &= 64 + 25 \\ AC^2 &= 89 \\ AC &= \sqrt{89} \end{aligned}$$



ก. $\sin C = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม C}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

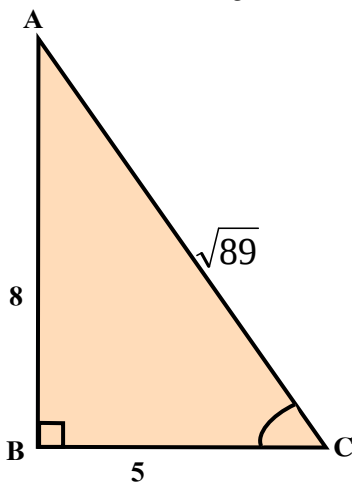
$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

ก. ถูกต้อง

ข. $\cos C = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม C}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

ข. ถูกต้อง



ค. $\tan C = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม C}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม C}}$

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{5}$$

ค. ถูกต้อง

ง. $\sec C = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม C}}$

$$\sec C = \frac{\sqrt{89}}{5}$$

แต่จากโจทย์ $\sec C = \frac{\sqrt{89}}{8}$

ง. ผิด

3. กำหนด $\cos A = 0.8$ ค่าของ $10 \sin A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

เทคนิคการทำ แปลงอัตราส่วนที่กำหนดในรูปทศนิยมให้เป็นเศษส่วน วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้
ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาความยาวด้านที่เหลือ แล้วหาอัตราส่วนที่ต้องการ

เฉลย ง

แนวคิด

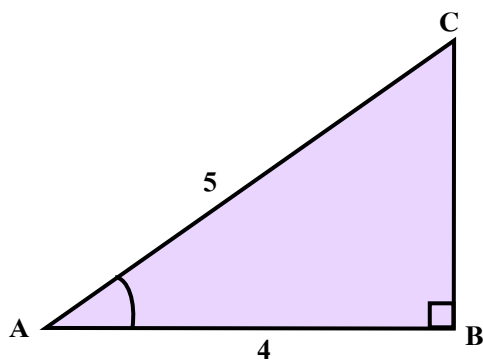
$$\begin{aligned}\cos A &= 0.8 \\ &= \frac{8}{10} \\ \cos A &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

นำมาวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจาก $\cos A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

และ $\cos A = \frac{4}{5}$

จะวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้



โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$5^2 = 4^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 25 - 16$$

$$BC^2 = 9$$

$$BC = \sqrt{9}$$

$$BC = 3$$

และ $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$

จะได้ $10 \sin A = 10 \times \left(\frac{3}{5}\right)$

$$= 6$$

ข้อคิด รู้ 1 อัตราส่วนใดๆ จะหาอัตราส่วนอื่นๆ ได้ทั้งหมด โดยการวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. ถ้า $\tan B = \frac{y}{x}$ แล้ว $\cos^2 B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$

ข. $\frac{x^2 + y^2}{x^2}$

ค. $\frac{x^2 + y^2}{y^2}$

ง. $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$

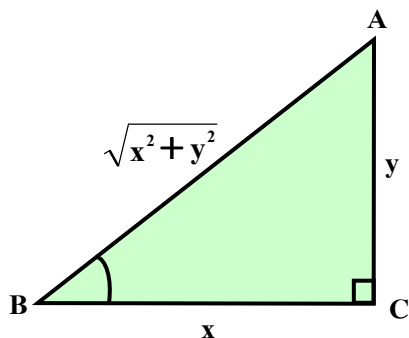
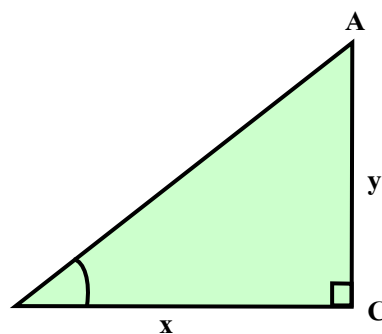
เทคนิคการทำ วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาความยาวด้านที่เหลือ แล้วหาอัตราส่วนที่ต้องการ

เฉลย ค

แนวคิด จาก $\tan B = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม B}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}}$

และ $\tan B = \frac{y}{x}$

จะวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้



โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

จะได้ $\cos B = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม B}}{\text{ความยาวด้านประกอบมุมฉาก}}$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos^2 B = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2$$

$$\cos^2 B = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

5. ถ้า $\cos A = \frac{5}{13}$ แล้วค่าของ $\sec A + \sin A$ เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{156}{65}$

ข. $\frac{192}{65}$

ค. $\frac{194}{65}$

ง. $\frac{229}{65}$

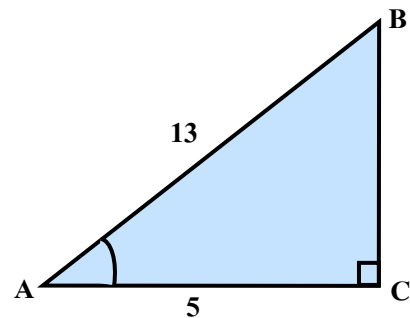
เทคนิคการทำ วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาความยาวด้านที่เหลือ แล้วหาอัตราส่วนที่ต้องการ

เฉลย ค

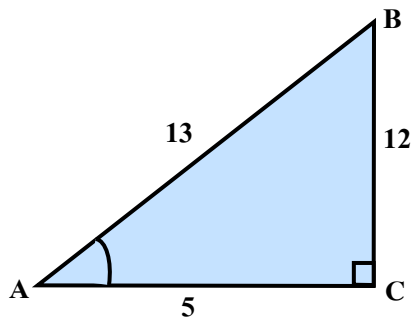
แนวคิด จาก $\cos A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

และ $\cos A = \frac{5}{13}$

จะวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้



โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$13^2 = 5^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 13^2 - 5^2$$

$$= 169 - 25$$

$$BC^2 = 144$$

$$BC = \sqrt{144} = 12$$

เนื่องจาก $\sec A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$

จะได้ $\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{5}$

เนื่องจาก $\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

จะได้ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$

ดังนั้น $\sec A + \sin A = \frac{13}{5} + \frac{12}{13}$

$$= \frac{(13 \times 13) + (12 \times 5)}{65}$$

$$= \frac{169 + 60}{65}$$

$$= \frac{229}{65}$$

6. ค่าของ $\frac{\tan 45^\circ + \cot 30^\circ \cdot \cot 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ข. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

ค. $2\sqrt{3}$

ง. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

เทคนิคการทำ แทนค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติตามที่โจทย์ต้องการ

เฉลย ง

แนวคิด

มุม อัตราส่วน	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$$\frac{\tan 45^\circ + \cot 30^\circ \cdot \cot 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

$$= 2 \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

เชื่อหรือไม่ เชื่อหรือไม่ว่า ถ้า $\sin A = 0.2$ แล้ว $0^\circ < \hat{A} < 30^\circ$

ถ้า $\sin A = 0.2$ แล้ว $0^\circ < \hat{A} < 30^\circ$

อธิบายได้ง่ายๆ ดังนี้ เราเห็นว่า $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$
 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} \approx 0.7$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} \approx 0.8$

มุมยังมีขนาดใหญ่ ค่า $\sin$ ของมุมยังมีค่ามากขึ้น

$$0 < 0.2 < 0.5$$

แสดงว่า $\sin 0^\circ < \sin A < \sin 30^\circ$ ($\sin 0^\circ = 0$)

ดังนั้น $0^\circ < \hat{A} < 30^\circ$

8. ค่าของ x จากสมการ $\sqrt{3} x \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 6$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 6

ข. 8

ค. 10

ง. 12

เทคนิคการทำ แทนค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติตามที่โจทย์ต้องการแล้วแก้สมการ

เฉลย ข

แนวคิด

$$\text{จาก } \sqrt{3} x \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 6$$

$$\text{จะได้ } \sqrt{3} x \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6$$

$$\frac{3}{4} x = 6$$

$$x = 6 \times \frac{4}{3}$$

$$x = 8$$

9. ถ้า $2 \cos A - \sqrt{3} = 0$ แล้ว $\tan A + \sin A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$\text{ก. } 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ข. } \frac{2\sqrt{3} + 3}{6}$$

$$\text{ค. } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ง. } \frac{2 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

เทคนิคการทำ หาขนาดของมุม A จากค่าอัตราส่วนที่กำหนด แล้วจึงหาอัตราส่วนที่ต้องการ

เฉลย ข

