



รายการโทรทัศน์เพื่อการศึกษา
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

คณิตศาสตร์
ตรีโกณมิติ ตอนที่ 2

โดย
อ.กนกวลี อุษณกรกุล

1. ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) สูตรส่วนกลับ มี 3 สูตร คือ

$$(1) \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} \text{ หรือ } \sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$$

$$(2) \cos A = \frac{1}{\sec A} \text{ หรือ } \cos A \cdot \sec A = 1$$

$$(3) \tan A = \frac{1}{\cot A} \text{ หรือ } \tan A \cdot \cot A = 1$$

2) สูตรความสัมพันธ์ระหว่าง $\tan A$, $\sin A$, $\cos A$

$$(1) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ เมื่อ } \cos A \neq 0$$

$$(2) \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ เมื่อ } \sin A \neq 0$$

3) สูตรเอกลักษณ์

$$(1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$(2) \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$(3) \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

4) สูตรความสัมพันธ์เมื่อ $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

เมื่อ $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ จะได้

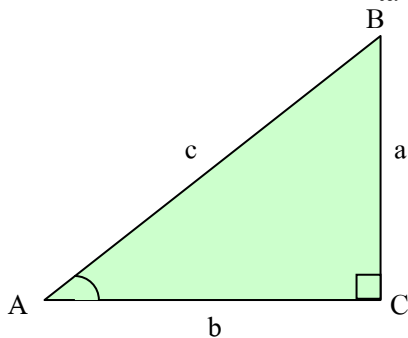
$$(1) \sin A = \cos B \text{ หรือ } \sin B = \cos A$$

$$(2) \tan A = \cot B \text{ หรือ } \tan B = \cot A$$

$$(3) \sec A = \operatorname{cosec} B \text{ หรือ } \sec B = \operatorname{cosec} A$$

ข้อควรระวัง (1), (2), (3) จะเท่ากันได้ต้องมีเงื่อนไขว่า $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ เท่านั้น

อธิบาย ความสัมพันธ์ระหว่าง $\tan A$, $\sin A$, $\cos A$



จากรูปสามเหลี่ยม $\sin A = \frac{a}{c}$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

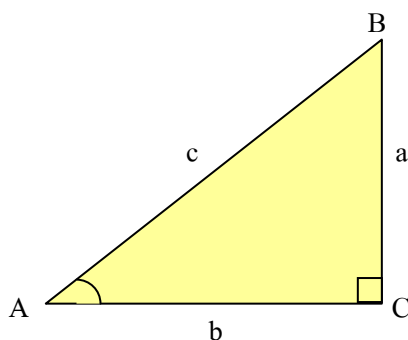
$$\tan A = \frac{a}{b}$$

จะเห็นว่า $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ เมื่อ $\cos A \neq 0$

และ $\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$ เมื่อ $\sin A \neq 0$

อธิบาย สูตรเอกลักษณ์



จากรูปสามเหลี่ยม $\sin A = \frac{a}{c}$

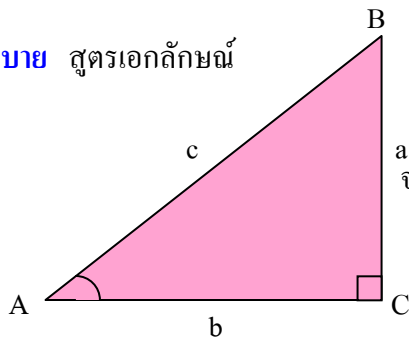
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2} \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

อธิบาย สูตรเอกลักษณ์



จากรูปสามเหลี่ยม $\sec A = \frac{c}{b}$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

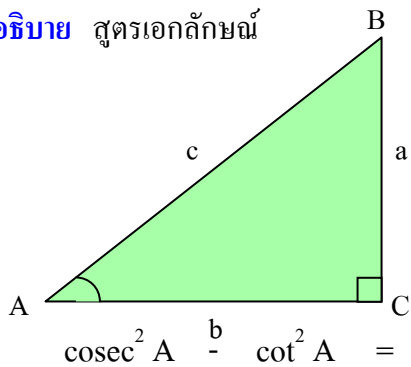
$$\begin{aligned} \sec^2 A - \tan^2 A &= 1 \\ &= \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \\ &= \frac{c^2 - a^2}{b^2} \\ &= \frac{b^2}{b^2} \end{aligned}$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$
 $b^2 = c^2 - a^2$

อธิบาย สูตรเอกลักษณ์



จากรูปสามเหลี่ยม $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

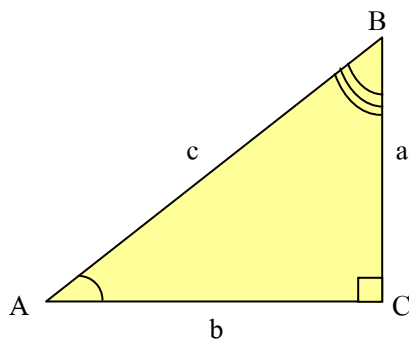
$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A &= 1 \\ &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \\ &= \frac{c^2 - b^2}{a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$
 $a^2 = c^2 - b^2$

อธิบาย ความสัมพันธ์เมื่อ $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$



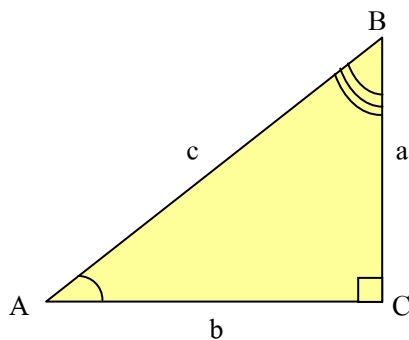
จากรูปสามเหลี่ยม $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

$$\begin{array}{l|l} \sin A = \frac{a}{c} & \cos A = \frac{b}{c} \\ \cos B = \frac{a}{c} & \sin B = \frac{b}{c} \end{array}$$

ดังนั้น $\sin A = \cos B$

และ $\cos A = \sin B$

อธิบาย ความสัมพันธ์เมื่อ $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ จะได้



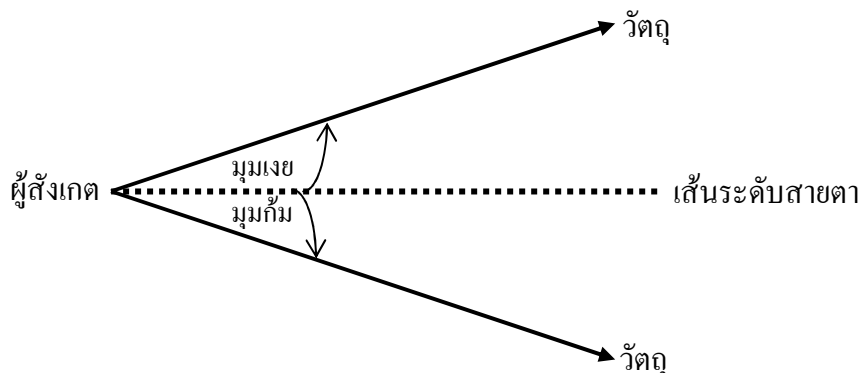
จากรูปสามเหลี่ยม $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

$$\begin{array}{l|l} \tan A = \frac{a}{b} & \cot A = \frac{b}{a} \\ \cot B = \frac{a}{b} & \tan B = \frac{b}{a} \end{array}$$

ดังนั้น $\tan A = \cot B$

และ $\cot A = \tan B$

2. การหาระยะทาง และความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



มุมเงย หมายถึง มุมที่วัดจากระดับสายตาขึ้นไปยังวัตถุซึ่งอยู่สูงกว่าผู้สังเกต

มุมก้ม หมายถึง มุมที่วัดจากระดับสายตาลงไปยังวัตถุซึ่งอยู่ต่ำกว่าผู้สังเกต

แนวข้อสอบ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้จริง

ก. $\sin^2 A - \cos^2 A = 1$

ข. $\cot A \cdot \sin A = \cos A$

ค. $\sin x + \cos x = 1$

ง. $\tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}$

เทคนิคการทำ ใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$

เฉลย ข

แนวคิด

$$\text{เนื่องจาก } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\text{พิจารณา } \cot A \cdot \sin A = \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \sin A$$

$$\text{ดังนั้น } \cot A \cdot \sin A = \cos A$$

2. ถ้า $(\sin A + \cos A)^2 = \frac{5}{4}$ แล้ว $\sin A \cos A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{8}$

ง. $\frac{1}{6}$

เทคนิคการทำ ใช้ความสัมพันธ์ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

เฉลย ค

แนวคิด จาก $(\sin A + \cos A)^2 = \frac{5}{4}$

$$\text{จะได้ } \sin^2 A + 2\sin A \cos A + \cos^2 A = \frac{5}{4}$$

$$(\sin^2 A + \cos^2 A) + 2\sin A \cos A = \frac{5}{4}$$

$$1 + 2\sin A \cos A = \frac{5}{4}$$

$$2\sin A \cos A = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A \cos A = \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

3. $2\cos A \sin A \cdot \sqrt{1+\tan^2 A} \cdot \sqrt{1+\cot^2 A}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 2

ข. 3

ค. 4

ง. 5

เทคนิคการทำ ใช้สูตรเอกลักษณ์ $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ และ $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

เฉลย ก

แนวคิด

$$\text{จาก } \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\text{จะได้ } \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\text{จาก } \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$\text{จะได้ } \operatorname{cosec} A = \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\text{พิจารณา } 2\cos A \sin A \cdot \sqrt{1 + \tan^2 A} \cdot \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$= 2\cos A \sin A \cdot \sec A \cdot \operatorname{cosec} A$$

$$= 2\cos A \sin A \cdot \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A}$$

$$= 2$$

4. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\sin A = \frac{3}{5}$ แล้ว $\cos (B-A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{3}{5}$

ข. $\frac{3}{4}$

ค. $\frac{4}{5}$

ง. $-\frac{5}{3}$

เทคนิคการทำ ใช้ความสัมพันธ์ $\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$

เฉลย ก

แนวคิด ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม $ABC = 180^\circ$ และมุม $B = 90^\circ$

$$\text{จะได้ } \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$$

$$\hat{B} - \hat{A} = \hat{C}$$

$$\cos (B-A) = \cos C$$

$$\text{และเนื่องจาก } \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \cos C = \sin A = \frac{3}{5}$$

5. เมย์ยืนห่างจากตึกหลังหนึ่ง 100 เมตร ถ้าเธอมองขึ้นไปที่ยอดตึกพบว่า ต้องทำมุมเงย 30° ตึกหลังนี้สูงกี่เมตร

ก. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$

ข. $100\sqrt{3}$

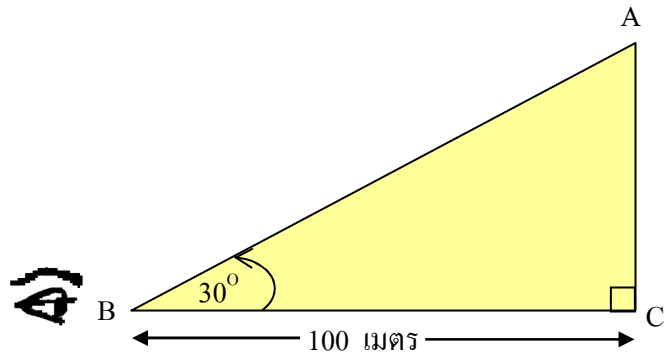
ค. 120

ง. $120\sqrt{3}$

เทคนิคการทำ วาดรูปจำลองสถานการณ์ แล้วใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติหาความยาวด้านที่ต้องการ

เฉลย ก

แนวคิด ให้ AC แทนตึก
จุด B เป็นจุดที่เมย์ยืน
จะวาดรูปจำลองได้ดังรูป



$$\frac{AC}{BC} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{AC}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{100 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

ตึกหลังนี้สูง $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ เมตร

6. คุณสรยุทธไปทำข่าวบนตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 12 เมตร เขาสังเกตเห็นรถของผู้ต้องสงสัยจอดอยู่บนถนนเป็นมุมก้ม 60° รถคันนี้ห่างจากฐานตึกประมาณกี่เมตร (กำหนด $\sqrt{3} \approx 1.732$)

ก. 20.7

ข. 18.7

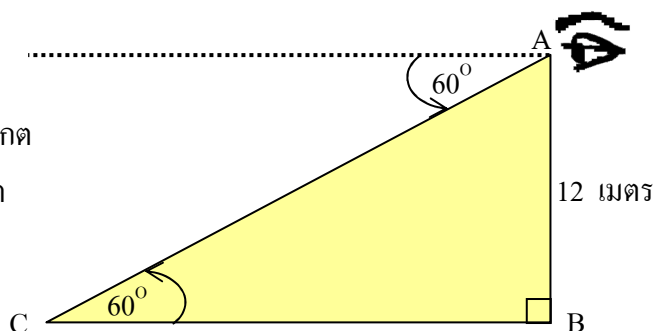
ค. 6.9

ง. 5.2

เทคนิคการทำ วาดรูปจำลองสถานการณ์ แล้วใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติหาความยาวของด้านที่ต้องการ

เฉลย ค

แนวคิด ให้ AB แทนตึก
A เป็นจุดที่สรยุทธสังเกตเห็น
C เป็นจุดที่รถยนต์จอด
จะวาดรูปจำลองได้ดังรูป



$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{12}{BC} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} BC = 12$$

$$BC = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

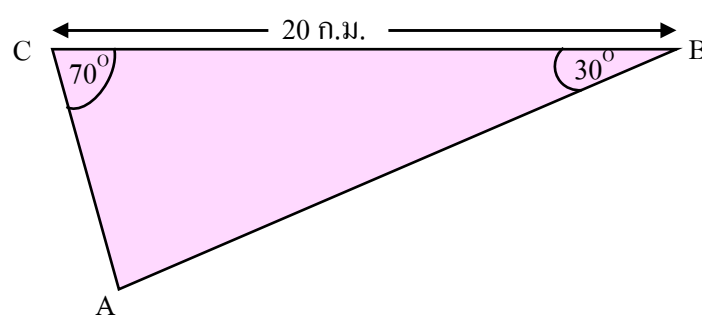
$$= \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$BC = 4 \times 1.732 \approx 6.928$$

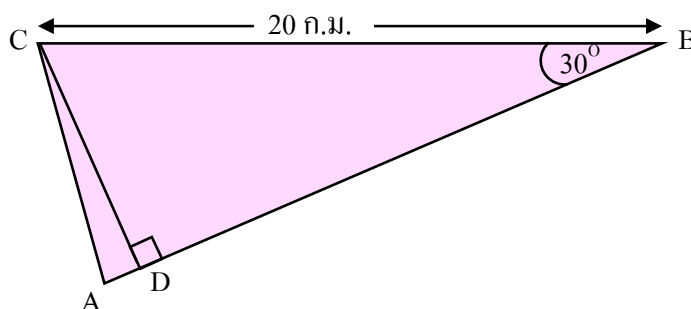
ดังนั้นรถผู้ต้องสงสัยอยู่ห่างจากฐานตึกประมาณ 6.9 เมตร

ข้อคิด รู้ 1 มุม 1 ด้าน จะหาด้านที่เหลือได้ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

7. **เชื่อหรือไม่** วงดนตรีคาราบาวเดินทางจากที่พักของตนเองเพื่อไปเล่นดนตรีที่เวทีซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของ เขาใหญ่ ดังรูป ถ้า BC เท่ากับ 20 กิโลเมตร $\angle ABC$ เท่ากับ 30° องศา $\angle ACB$ เท่ากับ 70° องศา ขณะที่กำลังเดินทาง แอ๊ด คาราบาว



กล่าวว่า รถของคณะวงดนตรีจะอยู่ใกล้เขาใหญ่มากที่สุด 10 กิโลเมตร คุณเชื่อหรือไม่



ให้ C แทนเขาใหญ่

ลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D

CD เป็นระยะทางที่รถของคณะวงดนตรีอยู่ใกล้

เขาใหญ่มากที่สุด

$$\text{ใน } \triangle BCD, \frac{CD}{BC} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{CD}{20} = \frac{1}{2}$$

$$CD = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$

รถของคณะวงดนตรีอยู่ใกล้เขาใหญ่มากที่สุด 10 กิโลเมตร จริง คุณเชื่อ แอ๊ด คาราบาว ได้

8. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนตึกสูง $10\sqrt{3}$ เมตร เขามองเห็นรถยนต์ 2 คันอยู่ในแนวเดียวกับตึกนั้น ด้วยมุมก้ม 30° และ 60° ตามลำดับ รถทั้งสองคันนี้อยู่ห่างกันกี่เมตร

ก. 30

ข. 20

ค. 15

ง. 10

เทคนิคการทำ วาดรูปจำลองสถานการณ์ แล้วใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติหาความยาวของด้านที่ต้องการ

เฉลย ข

แนวคิด

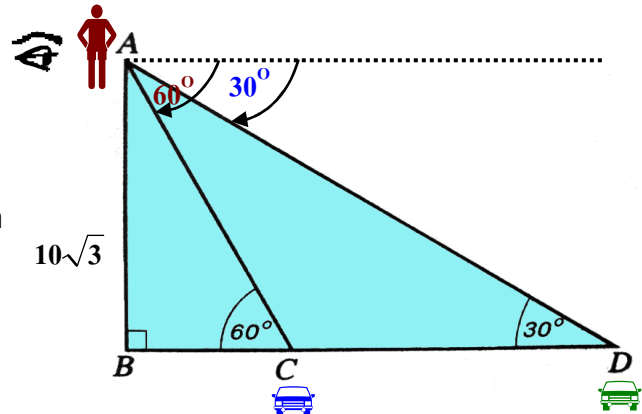
ให้ AB แทนตึก

A เป็นจุดที่ชายคนหนึ่งยืนอยู่

C เป็นจุดที่รถยนต์คันที่ 1 จอด

D เป็นจุดที่รถยนต์คันที่ 2 จอด

จะวาดรูปจำลองได้ดังรูป



$$\text{ใน } \triangle ABC, \quad = \tan 60^\circ$$

$$= \frac{AB}{BC}$$

$$BC = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$$

$$BC = \sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3}$$

$$\text{ใน } \triangle ABD, \quad \frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$BD = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 30$$

$$CD = BD - BC$$

$$= 30 - 10$$

$$CD = 20$$

ดังนั้น รถทั้งสองคันอยู่ห่างกัน 20 เมตร