



คณิตศาสตร์

(สรุปสูตรฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม)

อ.ชวลิต กุลกียรติการ

(พีคอล์ฟ)

สรุปสูตรฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

By พี่กอล์ฟ (ชวลิต กุลกิติการ)

วศ.บ. (เกียรตินิยม) จุฬาฯ

สถาบันกวดวิชา เดอะ เบรน

สูตรแยกตัวประกอบ

$$1. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$3. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$4. a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

สมบัติเลขยกกำลัง

ถ้า a, b, a^m, b^n เป็นจำนวนจริง และ $a, b \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{โดยที่ } b \neq 0$$

$$6. a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{โดยที่ } a \neq 0$$

$$7. a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$8. a^0 = 1 \quad \text{โดยที่ } a \neq 0$$

Exponential Function

นิยาม เรียก $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ / y = a^x; a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$ ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
 จากนิยามสรุปได้ว่า

1. ฐานของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลต้องเป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่ใช่ 1
2. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือ $\mathbb{R}$
3. เรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือ $\mathbb{R}^+$
4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
5. ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม, ถ้า $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด

Logarithmic Function เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

นิยาม เรียก $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} / y = \log_a x; a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$ ว่าฟังก์ชันลอการิทึม
 จากนิยามสรุปได้ว่า

1. ฐานของฟังก์ชันลอการิทึมต้องเป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่ใช่ 1
2. โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึมคือ $\mathbb{R}^+$
3. เรนจ์ของฟังก์ชันลอการิทึมคือ $\mathbb{R}$
4. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
5. ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม, ถ้า $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด

สมบัติของ log

- | | |
|---|---|
| 1. $\log_a 1 = 0$ | 6. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$ |
| 2. $\log_a a = 1$ | 7. $a^{\log_a m} = m$ |
| 3. $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ | 8. $a^{\log_b m} = m^{\log_b a}$ |
| 4. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ | 9. $\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$ โดยที่ $m > 0$ และ $m \neq 1$ |
| 5. $\log_b a^m = m \log_b a$ | 10. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ |

ตะลุยโจทย์ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. ถ้า $\sqrt{3x-2} = \sqrt{6x} - \sqrt{3x+2}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

2. จงแก้สมการ $\frac{1}{2^x - \sqrt{2^{2x} - 2^x}} - \frac{1}{2^x + \sqrt{2^{2x} - 2^x}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

3. ถ้า x_1, x_2 เป็นคำตอบของสมการ $4^x - 2^{x+3} - 2^{x-1} + 4 = 0$
แล้ว $\log_4(x_1 + x_2)$ เท่ากับเท่าใด

4. จงหาค่าของ x จากสมการ $(30)^{2x} + 2(10)^{2x} - 8(3^{2x} + 2) = 0$

กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$

5. ถ้า a, b, c เป็นคำตอบที่แตกต่างกันของสมการ $1000^x - 8 \cdot 100^x + 17 \cdot 10^x = 10$
แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10

2. 8

3. 1

4. 0

6. ถ้า $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$ แล้ว จงหาค่าของ $x^2 - 2x$

7. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

และ $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$ ค่าของ x^y เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{8}$

2. $-\frac{1}{8}$

3. 27

4. -27

8. กำหนดให้ $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = 2^x$ และ $h(x) = (f + g^{-1})(x)$

ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริงบวกในข้อใดทำให้ $(f \circ h)(x) = \frac{1}{2}$

1. $\sqrt[3]{2}$

2. $\sqrt[3]{4}$

3. $\sqrt[3]{8}$

4. $\sqrt[3]{16}$

9. ถ้า $\log_3(x(\log_{125} 5)^{\log_5 125}) = 0$ แล้วค่าของ x คือข้อใด

1. 3^0

2. 3^1

3. 3^2

4. 3^3

10. $\log_a x = 2$, $\log_b x = -1$ และ $\log_c x = \frac{2}{5}$ จงหาค่าของ $\log_{abc} x$

11. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 + \log_2 9} + \frac{2}{1 + \log_6 3} + \frac{4}{1 + \log_3 6}$ ค่าของ A อยู่ในเซตใด

1. $[2, 4)$

2. $(3, 5]$

3. $(5, 7]$

4. $[7, 9)$

12. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_{3x} 9 + (\log_3 x)^2 = 2$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{28}{9}$ 2. $\frac{37}{9}$ 3. $\frac{31}{3}$ 4. 11

13. กำหนด $f(x) = \log_2 x$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟของฟังก์ชัน $g(x) = f(9 \cdot 2^x)$ เป็นเส้นตรง

ข. กราฟของฟังก์ชัน $h(x) = 9 \cdot 2^{f(x^2+1)}$ เป็นพาราโบลา

ข้อใดถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
 3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

14. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = 4^x$ ตัดกับเส้นโค้ง $y = 2^{x+1} + 3$ ที่จุด p
 ถ้าจุด p อยู่บนเส้นตรง $y = mx + 8$ แล้ว m มีค่าเท่าใด

1. $\log_2 3$

2. $\log_2 5$

3. $\log_3 2$

4. $\log_5 2$

15. ถ้า $\frac{1}{2} \log \left[\left(a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \right] = 1 - \log 5$ แล้ว $b = 10^{2 + \log(a^2 + 1)}$ เท่ากับเท่าใด

16. ถ้า a, b เป็นคำตอบของสมการ $6^x - 3^{x+1} - 2^{x+2} + 12 = 0$

แล้ว คำตอบของสมการ $(ab)^{2x+1} = (ab+3)^x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$ 2. $\frac{\log 4}{\log 7 - \log 16}$ 3. $\frac{1}{\log_5 8 - 2}$ 4. $\frac{1}{\log_2 5 - 2}$

17. กำหนดให้ a, b เป็นคำตอบของสมการ $\log_5 x + 2 \log_x 5 = 3$ โดยที่ $a < b$

ถ้า I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก และ $A = \{x \in I^+ / x \in [a, b] \text{ และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

แล้ว จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A

18. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และถ้า

$$A = \{x \in R / 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0\} \quad \text{และ}$$

$$B = \{x \in R / \log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}\}$$

แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

19. กำหนดให้ $a > 1$ และ $b, c > 0$ ถ้า $a^2 + b^2 = c^2$ และ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = x(\log_{c+b} a)(\log_{c-b} a)$$

แล้ว x มีค่าเท่าใด

20. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้

$$C = \{x \in \mathbb{R} / (3x^2 - 11x + 7)(3x^2 + 4x + 1) = 1\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด

21. ถ้า A แทนเซตคำตอบของ $2(\log_3 x - 1)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0, 3)$

2. $(1, 4)$

3. $(2, 5)$

4. $(2, 9)$

22. เซตคำตอบของสมการ $2^{x^2(x-3)} < 8^{\left(\frac{2}{3}-x\right)}$ คือข้อใด

1. $(-\infty, 2)$

2. $(-\infty, 2]$

3. $(2, \infty)$

4. $[2, \infty)$

23. กำหนดให้ $a = \log 2$, $b = \log 3$ เซตคำตอบของสมการ $10^{x^2} < 3^x \cdot 2^{\log 3 - x}$ คือข้อใด

1. $(-2a, b)$

2. $(-a, b)$

3. $(-b, 2a)$

4. $(-b, a)$

24. เซตคำตอบของ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+5x+3} < \frac{1}{27}$ คือข้อใด

1. $(-5, 0)$

2. $(-3, -2)$

3. $(-\infty, -5) \cup (0, \infty)$

4. $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$

25. กำหนดอสมการ $\log^2 x - 3 \log_{10} x^2 < 0$ ถ้าเซตคำตอบของอสมการคือ

$$\{x/10^m < x < 10^n\} \text{ จงหา } m+n$$