

ติวเข้มเต็มเต็มความรู้
เฉลยโจทย์คณิตศาสตร์

Relation & Function

โดย อาจารย์วิเศษ กี่สุขพันธ์

เฉลยโจทย์ตัวแบบเติมเต็มความรู้

ข้อ 1 ตอบ 2

วิธีทำ วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} \text{จาก } y &= \frac{2x^2-8}{x^2+1} \\ \text{จะได้ } y &= \frac{2x^2+2-10}{x^2+1} \\ y &= \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{10}{x^2+1} \\ y &= 2 - \frac{10}{x^2+1} \end{aligned}$$

y จะเป็นจำนวนเต็มเมื่อ $2 - \frac{10}{x^2+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

นั่นหมายความว่า $\frac{10}{x^2+1}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม เราจึงพบว่า

$$x^2+1 = 1, 2, 5, 10 \text{ (ตัวประกอบที่เป็นบวกของ 10)}$$

$$x^2 = 0, 1, 4, 9$$

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad \therefore D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{และจะได้ว่า } x = 0 \rightarrow y = 2 - 10 = -8$$

$$x = \pm 1 \rightarrow y = 2 - 5 = -3$$

$$x = \pm 2 \rightarrow y = 2 - 2 = 0$$

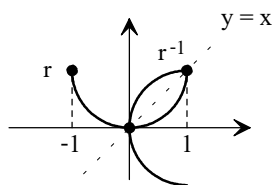
$$x = \pm 3 \rightarrow y = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore R_r = \{-8, -3, 0, 1\} \text{ และ } D_r - R_r = \{-2, -1, 2, 3\}$$

ข้อ 3 ตอบ 1

วิธีทำ พิจารณา ก.

จากโจทย์ จะได้กราฟ r และ r^{-1} ดังรูป โดยกราฟ r^{-1} จะ



สมมาตรกับกราฟ r โดยมีเส้นตรง

$y = x$ เป็นแกนสมมาตร

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(x, y) / x \in [0, 1] \text{ และ } x = y^2\}$$

$$= \{(x, y) / x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm \sqrt{x}\}$$

$$= \{(x, y) / x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm \sqrt{|x|}\} \quad **$$

$\therefore$ ก. ถูก

** เมื่อ $x \in [0, 1]$ จะได้ $x = |x|$

พิจารณา ข. จากกราฟ พบว่ากราฟ r และ r^{-1} ตัดกัน 2 จุด
คือ $(0, 0)$ และ $(1, 1)$ จริง ดังนั้น ข. ถูก

ข้อ 6 ตอบ 1

วิธีทำ จาก $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

หา $g(2)$ $2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

$\therefore 2 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ $\therefore g(2) = \sqrt{2}$

หา $g(-8)$ $-8 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

$-8 = -x^2 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$ $\therefore g(-8) = -2\sqrt{2}$

ดังนั้น $f^{-1}(g(2) + g(-8)) = f^{-1}(\sqrt{2} + (-2\sqrt{2})) = f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{3} **$

** หา $f^{-1}(-\sqrt{2})$

วิธีที่ 1 จาก $f(x) = 3x - 1$

$x \Leftrightarrow y \quad x = 3y - 1$

$y = \frac{x+1}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

$\therefore f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}+1}{3} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = 3x - 1$

$-\sqrt{2} = 3x - 1$

$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$

ข้อ 9 ตอบ 3

วิธีทำ จาก $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$

$f^{-1}(g(x)) = \frac{-6x}{x-1}$

$g(x) = f\left(\frac{-6x}{x-1}\right)$

$g(a) = f\left(\frac{-6a}{a-1}\right)$

$2 = \frac{\frac{-6a}{a-1} + 3}{\frac{-6a}{a-1} + 6}$

$2 = \frac{\frac{-6a+3(a-1)}{a-1}}{\frac{-6a+6(a-1)}{a-1}}$

$2 = \frac{-6a+3a-3}{-6a+6a-6}$

$2 = \frac{-3a-3}{-6}$

$\therefore a = 3$ และ $a \in [3, 5)$

ข้อ 11 ตอบ 4

วิธีทำ พิจารณา ก. $f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$

แทน x ด้วย -5

$$f(0) = (-5)^3 - (-5)^2 + 2(-5)$$

$$\therefore f(0) = -125 - 25 - 10 = -160$$

และจาก $g^{-1}(2x-1) = x+4$

$$2x-1 = g(x+4)$$

$$g(x+4) = 2x-1$$

แทน x ด้วย -4

$$\therefore g(0) = 2(-4)-1 = -9$$

$$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = -160 - (-9) = -151$$

ดังนั้น $(f-g)(0) \neq -169$ ก. ผิด

พิจารณา ข. $(g \circ f)(x) + 5 = 0, x \in I$

$$(g \circ f)(x) = -5$$

$$g(f(x)) = -5$$

$$f(x) = g^{-1}(-5) \quad *$$

$$f(x) = 2$$

$$x = f^{-1}(2) \quad **$$

$$x = 6$$

$$6 \in \{x \in I / (g \circ f)(x) + 5 = 0\} \quad \therefore \text{ข. ผิด}$$

$$* \text{ จาก } g^{-1}(2x-1) = x+4 \quad \therefore g^{-1}(-5) = 2$$

$\uparrow$
 -2

$\uparrow$
 -2

$$** \text{ จาก } f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$$

$$x+5 = f^{-1}(x^3 - x^2 + 2x)$$

$$f^{-1}(x^3 - x^2 + 2x) = x+5$$

แทน x ด้วย 1

$$f^{-1}(1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1) = 1+5$$

$$f^{-1}(2) = 6$$

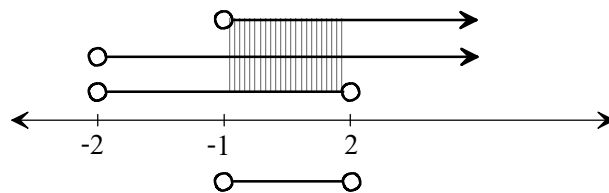
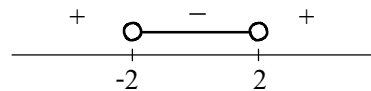
ข้อ 14 ตอบ 2

วิธีทำ พิจารณา D_f

$$y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4-x^2)$$

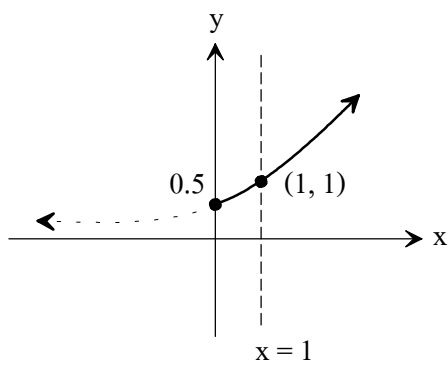
$$\begin{array}{ccccc}
 x+1 > 0 & \text{และ} & x+2 > 0 & \text{และ} & 4-x^2 > 0 \\
 x > -1 & \downarrow \cap & x > -2 & \downarrow \cap & x^2-4 < 0
 \end{array}$$

$$(x-2)(x+2) < 0$$



ดังนั้น $D_f = (-1, 2)$

พิจารณา R_g



จากกราฟของ g พบว่า

$$R_g = [0.5, \infty)$$

ดังนั้น $D_f \cap R_g = [0.5, 2)$ ซึ่งพบว่าเป็นสับเซตของ $[0.5, 2.5)$

ข้อ 15 หน้า 15 ตอบ 4

วิธีทำ $f^{-1}(x) = g \circ h(x)$

$$= g(h(x))$$

$$= g\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$$

$$\therefore f^{-1}_{(x)} = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}} - 2 \quad \text{————(1)}$$

จาก $R_f = D_{f^{-1}}$ ดังนั้นจะหา $D_{f^{-1}}$ แทน

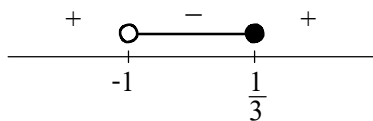
พิจารณา $D_{f^{-1}}$ จาก (1)

$$\frac{3-x}{x+1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{3-x-2(x+1)}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{(-3x+1)}{(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(3x-1)}{(x+1)} \leq 0$$



ดังนั้น $R_f = D_{f^{-1}} = (-1, \frac{1}{3}]$ ซึ่งเป็นสับเซตของ $(-1, 2)$

ข้อ 17 ตอบ d

วิธีทำ จาก

$$f(x) = g(x)h(x)$$

$$(x^5 - 1)(x^3 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \cdot h(x)$$

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \cdot h(x)$$

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = (x - 1) \cdot (x^3 + 1) \cdot h(x)$$

$$(x - 1)(x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^3 + 1) \cdot h(x) = 0$$

$$(x - 1)(x^3 + 1)[(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - h(x)] = 0$$

$$\text{พบว่า } x - 1 = 0 \text{ หรือ } x^3 + 1 = 0 \text{ หรือ } (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - h(x) = 0$$

$$h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\therefore h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$h(1) = (1)^4 + (1)^3 + (1)^2 + 1 + 1 = 5$$

ข้อ 19 ตอบ 763

วิธีทำ จากโจทย์ $(f \circ g)(x) + 2(f \circ g)(1-x) = 6x^2 - 10x + 17$ ———(1)

$$2(f \circ g)(x) + (f \circ g)(1-x) = 6x^2 - 2x + 13 \quad \text{————(2)}$$

$$2 \times (2), \quad 4(f \circ g)(x) + 2(f \circ g)(1-x) = 12x^2 - 4x + 26 \quad \text{————(3)}$$

$$(3) - (1), \quad 3(f \circ g)(x) = 6x^2 + 6x + 9$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$f(g(x)) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$f(x^2 + x + 3) = 2x^2 + 2x + 6 - 3$$

$$\therefore f(x^2 + x + 3) = 2(x^2 + x + 3) - 3$$

แทน $x^2 + x + 3$ ด้วย x จะได้

$$f(x) = 2x - 3$$

$$\text{และ } f(383) = 2(383) - 3 = 763$$

ข้อ 20 ตอบ 66

วิธีทำ $f(2-3x) = 4-x$ หา $f(i)$

$$2-3x = i$$

$$2-i = 3x$$

$$x = \frac{2-i}{3}$$

$$\therefore f(i) = 4 - \left(\frac{2-i}{3} \right)$$

$$= \frac{12 - (2-i)}{3}$$

$$f(i) = \frac{10+i}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} f(i) &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{10+i}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{12} (10+i) \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^{12} 10 + \sum_{i=1}^{12} i \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[12 \cdot 10 + \frac{12}{2}(12+1) \right] \\ &= 66 \end{aligned}$$

ข้อ 21 ตอบ 1

วิธีทำ จาก $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ หา $f(\sec^2\theta)$

$$\frac{x}{x-1} = \sec^2\theta$$

$$x = \sec^2\theta \cdot x - \sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta = \sec^2\theta \cdot x - x$$

$$\sec^2\theta = (\sec^2\theta - 1) \cdot x$$

$$x = \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sec^2\theta) &= \frac{1}{\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}} \\ &= \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} \\ &= \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} - \frac{1}{\sec^2\theta} \\ &= 1 - \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

ข้อ 22 ตอบ a

วิธีทำ จาก $P(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$

ได้ว่า $P(x^2 + 1) = (x^2)^2 + 5x^2 + 3$

แทน x^2 ด้วย $(x^2 - 2)$

$$P((x^2 - 2) + 1) = (x^2 - 2)^2 + 5(x^2 - 2) + 3$$

$$\begin{aligned} P(x^2 - 1) &= (x^4 - 4x^2 + 4) + 5x^2 - 10 + 3 \\ &= x^4 + x^2 - 3 \end{aligned}$$

ข้อ 23 ตอบ 1

วิธีทำ จาก $f(3x - 5) = 18x^2 - 57x + 48$ ———(1) หา $f(x)$

$$3x - 5 = A$$

$$x = \frac{A+5}{3} \text{ ———(2)}$$

แทน (2) ใน (1)

$$f(A) = 18\left(\frac{A+5}{3}\right)^2 - 57\left(\frac{A+5}{3}\right) + 48$$

แทน A ด้วย x

$$\therefore f(x) = 18\left(\frac{x+5}{3}\right)^2 - 57\left(\frac{x+5}{3}\right) + 48$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(x+5)^2 - 19(x+5) + 48 \\
 &= 2(x^2 + 10x + 25) - 19x - 95 + 48 \\
 &= 2x^2 + x + 3 \\
 (f \circ f)(-1) - f^2(1) &= f(f(-1)) - f(1) \cdot f(1) \\
 &= f(4) - 6 \cdot 6 \\
 &= 39 - 36 = 3
 \end{aligned}$$

ข้อ 24 ตอบ d

วิธีทำ จาก $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$

$$\text{แทน } x = 2, \quad f(2) + f(-1) = 2 \quad \text{————(1)}$$

$$\text{แทน } x = -1, \quad f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{————(2)}$$

$$\text{แทน } x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{————(3)}$$

$$(1) + (3) - 2, \quad 2f(2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f(-1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - (-1)$$

$$2f(2) = \frac{7}{2} \quad \therefore f(2) = \frac{7}{4}$$

ข้อ 25 ตอบ 1

วิธีทำ จาก $f(x) = ax + b \rightarrow f(f(x)) = f(ax + b)$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

$$\rightarrow f(f(f(x))) = a(a^2x + ab + b) + b$$

$$= a^3x + a^2b + ab + b$$

$$\rightarrow f(f(f(f(x)))) = a(a^3x + a^2b + ab + b) + b$$

$$= a^4x + a^3b + a^2b + ab + b$$

$$\text{จากโจทย์ } f(f(f(f(x)))) = 16x + 45$$

$$\text{แสดงว่า } a^4 = 16 \text{ และ } a^3b + a^2b + ab + b = 45$$

$$\text{จาก } a^4 = 16 \rightarrow a = \cancel{2} - 2 \text{ (กำหนด } f \text{ เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้น } a < 0)$$

$$\text{แทน } a = -2 \text{ ใน } a^3b + a^2b + ab + b = 45$$

$$-8b + 4b - 2b + b = 45$$

$$-5b = 45 \quad \therefore b = -9$$

$$\text{และ } a + b = (-2) + (-9) = -11$$

ข้อ 26 ตอบ 3

วิธีทำ จาก $f(x) = ax + b$ และ $g(x) = bx + a$

$$f(g(50)) - g(f(50)) = 28$$

$$f(50b + a) - g(50a + b) = 28$$

$$[a(50b + a) + b] - [b(50a + b) + a] = 28$$

$$a^2 + b - b^2 - a = 28$$

$$(a^2 - b^2) - (a - b) = 28$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 28$$

$$(a + b - 1)(a - b) = 28$$

เมื่อ $a, b \in I^+$ จะพบว่า $a + b - 1 \in I^+$ และทำให้ $a - b \in I^+$ ด้วยโดย $a + b - 1 > a - b$ เสมอ จึงเกิดได้ 3 กรณีดังตารางด้านล่างนี้ และมีเพียง 2 กรณีคือ (15, 14) และ (6, 2) เท่านั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $a, b \in I^+$

$a + b - 1$	$a - b$	a	b
28	1	15	14
14	2	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$
7	4	6	2

ข้อ 27 ตอบ 3

วิธีทำ จากโจทย์ $25x^4 - 10x^2 + 16y^2 - 8y = -2$

$$[(5x^2)^2 - 2(5x^2)(1)] + [(4y)^2 - 2(4y)(1)] = -2$$

$$[(5x^2)^2 - 2(5x^2)(1) + (1)^2] + [(4y)^2 - 2(4y)(1) + (1)^2] = -2 + 1 + 1$$

$$[5x^2 - 1]^2 + [4y - 1]^2 = 0$$

$$5x^2 - 1 = 0 \text{ และ } 4y - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \frac{1}{4}$$

$$\therefore r = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

พบว่า r เป็นฟังก์ชัน (หน้าไม่ซ้ำ) และ $D_r \neq R_r$ เพราะ

$$D_r = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}, R_r = \left\{ \frac{1}{4} \right\} \text{ ดังนั้น ก. ผิด ข. ถูก}$$

ข้อ 28 ตอบ 30

วิธีทำ จาก $xf(x) + f(1-x) = 2x - x^2$ ———(1)

แทน x ด้วย $1-x$

$$(1-x)f(1-x) + f(1-(1-x)) = 2(1-x) - (1-x)^2$$

$$f(x) + (1-x) \cdot f(1-x) = 2(1-x) - (1-x)^2 \text{ ———(2)}$$

นำ (2) คูณ $\frac{1}{(1-x)}$

$$\frac{1}{(1-x)}f(x) + f(1-x) = 2 - (1-x) \text{ ———(3)}$$

$$(1)-(3) \quad , \quad \left[x - \frac{1}{(1-x)} \right] f(x) = x - x^2 - 1$$

$$\left(\frac{x-x^2-1}{1-x} \right) f(x) = x - x^2 - 1$$

$$f(x) = 1-x$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=25}^{54} (x + f(x)) &= \sum_{x=25}^{54} (x + 1 - x) \\ &= \sum_{x=25}^{54} (1) = (54 - 25 + 1)(1) = 30 \end{aligned}$$

ข้อ 29 ตอบ 840

วิธีทำ $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$, $f(1) = 4$

$$\begin{aligned} \dots f(2) &= f(1+1) = f(1) + f(1) + 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 4 + 4 + 4 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots f(4) &= f(2+2) = f(2) + f(2) + 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 12 + 12 + 16 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots f(8) &= f(4+4) = f(4) + f(4) + 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 40 + 40 + 64 = 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots f(16) &= f(8+8) = f(8) + f(8) + 4 \cdot 8 \cdot 8 \\ &= 144 + 144 + 256 = 544 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots f(20) &= f(16+4) = f(16) + f(4) + 4 \cdot 16 \cdot 4 \\ &= 544 + 40 + 256 = 840 \end{aligned}$$

ข้อ 30 ตอบ 5

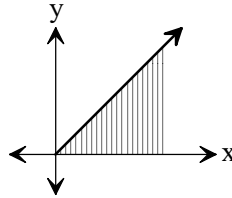
วิธีทำ พิจารณา r_1

การวาดกราฟ r_1 ให้แบ่ง 4 กรณี

กรณีที่ 1 $(x, y) \in Q_1$

$$|x| \geq |y| \rightarrow x \geq y$$

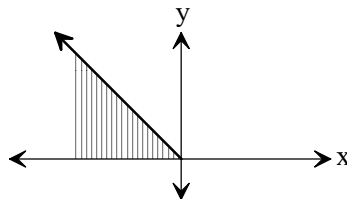
$$\therefore y \leq x$$



กรณีที่ 2 $(x, y) \in Q_2$

$$|x| \geq |y| \rightarrow -x \geq y$$

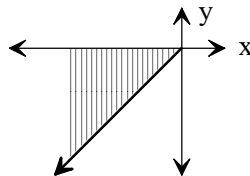
$$\therefore y \leq -x$$



กรณีที่ 3 $(x, y) \in Q_3$

$$|x| \geq |y| \rightarrow -x \geq -y$$

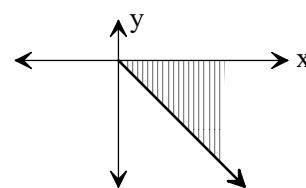
$$\therefore y \geq x$$



กรณีที่ 4 $(x, y) \in Q_4$

$$|x| \geq |y| \rightarrow x \geq -y$$

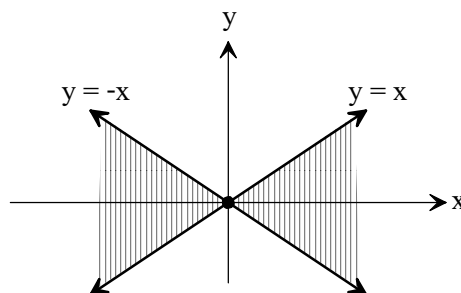
$$\therefore y \geq -x$$



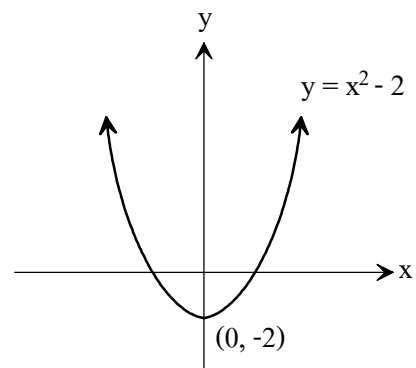
หมายเหตุ โดยกรณี $y = 0$, $|x| \geq |y| \rightarrow |x| \geq 0$ เป็นจริงเสมอทุก $x \in \mathbb{R}$

แสดงว่า $y = 0$ (แกน x) เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ r_1

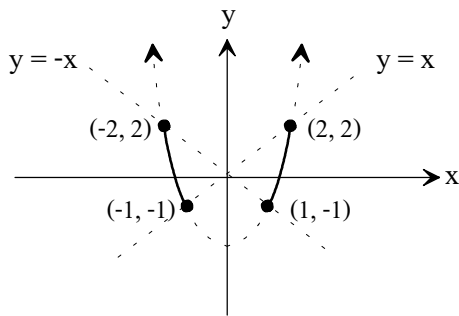
จะได้กราฟ r_1



พิจารณา r_2 พบว่าได้กราฟพาราโบลา ดังรูป



พิจารณา r โดย $r = r_1 \cap r_2$



จะพบว่า

$$D_r = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

$$\text{และ } R_r = [-1, 2]$$

หมายเหตุ จุดตัดของ $y = x$ และ $y = x^2 - 2$ คือ $(2, 2), (-1, -1)$

$$\text{โดย } x = x^2 - 2$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

$$0 = (x-2)(x+1) \quad \therefore x = 2, -1$$

เมื่อ $x = 2 \rightarrow y = 2$ และ $x = -1 \rightarrow y = -1$

และจุดตัด $y = -x$ และ $y = x^2 - 2$ คือ $(-2, 2), (1, -1)$

$$\text{โดย } -x = x^2 - 2$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$0 = (x+2)(x-1) \quad \therefore x = -2, 1$$

เมื่อ $x = -2 \rightarrow y = 2$ และ $x = 1 \rightarrow y = -1$

ข้อ 31 ตอบ $[2, e]$

วิธีทำ พิจารณา R_A

$$\text{จาก } y = \cos x \rightarrow \cos x \in [-1, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore R_A = [-1, 1]$$

พิจารณา R_B

$$\text{จาก } -1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin x} \leq e^1$$

$$\rightarrow \frac{1}{e} \leq y \leq e$$

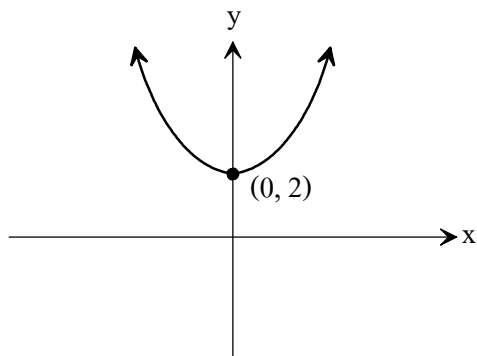
$$\therefore R_B = \left[\frac{1}{e}, e \right]$$

พิจารณา R_C

$$C = \{(y, x) / x = y^2 + 2\}$$

$$= \{(x, y) / y = x^2 + 2\}$$

ได้กราฟพาราโบลา ดังรูป



$$\therefore R_C = [2, \infty)$$

ดังนั้น $[R_A \cup R_B] \cap R_C = [2, e]$

ข้อ 32 ตอบ 48

วิธีทำ จาก $(goh)(x) = 2x - 1$

$$g(h(x)) = 2x - 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot h(x) - 3 = 2x - 1$$

$$h(x) = 6x + 6$$

$$\therefore (hog)(30) = h(g(30)) = h(7) = 6 \cdot 7 + 6 = 48$$

ข้อ 33 ตอบ 5028

วิธีทำ $(gof)(n) = g(f(n)) = f(n) + 2$

$$= (\text{เศษเหลือที่เกิดจากการหาร } n^2 \text{ ด้วย } 4) + 2$$

จะได้ว่า

$$\left. \begin{array}{l} gof(1) = 1 + 2 = 3 \\ gof(2) = 0 + 2 = 2 \\ gof(3) = 1 + 2 = 3 \\ gof(4) = 0 + 2 = 2 \\ gof(5) = 1 + 2 = 3 \\ \vdots \end{array} \right\} \therefore gof(n) = \begin{cases} 3, & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 2, & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{2011} (gof)(n) = gof(1) + gof(2) + gof(3) + gof(4) + \dots + gof(2011)$$

$$= \underbrace{3+2}_5 + \underbrace{3+2}_5 + \dots + 3$$

$$= 5 \times \frac{2010}{2} + 3 = 5028$$

ข้อ 34 ตอบ 1

วิธีทำ $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x))$

$$= (f \circ g)(x^3 + 2x^2 + 2x)$$

$$= f(g(x^3 + 2x^2 + 2x))$$

$$= f(\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}$$

หาโดเมนของ $f \circ g \circ h$

$$x^3 + 2x^2 + 2x > 0$$

$$x(x^2 + 2x + 2) > 0$$

$$(x)((x+1)^2 + 1) > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow D_{f \circ g \circ h} = \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ - \{ \}$$

$$\therefore A = \{ \} \text{ และ } n(A) = 0$$

ข้อ 35 ตอบ 1

วิธีทำ จากโจทย์ $G_0(x) = \frac{1}{1-x}$

และจาก $G_n(x) = G_0(G_{n-1}(x))$

ดังนั้น $G_1(x) = G_0(G_0(x))$

$$= G_0\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

และ $G_2(x) = G_0(G_1(x))$

$$= G_0\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)} = x$$

และ $G_3(x) = G_0(G_2(x))$

$$= G_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

และ $G_4(x) = G_0(G_3(x))$

$$= G_0(G_0(x))$$

$$= G_1(x) = \frac{x-1}{x}$$



และจะพบว่า

$$G_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , n \text{ หารด้วย } 3 \text{ ลงตัว} \\ \frac{x-1}{x} & , n \text{ หารด้วย } 3 \text{ เหลือเศษ } 1 \\ x & , n \text{ หารด้วย } 3 \text{ เหลือเศษ } 2 \end{cases}$$

ดังนั้น $G_{2553}(x) = \frac{1}{1-x}$ เพราะ 2553 หารด้วย 3 ลงตัว

$$\text{และ } G_{2553}(2553) = \frac{1}{-2552}$$

www.facebook.com/WeByThebrain

www.facebook.com/peeae.Thebrain