

สรุปสูตรแคลคูลัส

ลิมิตของฟังก์ชัน

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่ $x = a$ เมื่อฟังก์ชัน f มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เขียนแทนด้วย $\frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}f(x), f'(x)$

$$\text{โดยที่ } \frac{d}{dx}y = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. ค่าของอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$

$$\text{โดยที่ } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}cu = c \cdot \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx}cx = c \cdot \frac{dx}{dx}^1 = c$
4. $\frac{d}{dx}u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \cdot \frac{dx}{dx}^1 = nx^{n-1}$
5. $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{d}{dx}u$
6. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v' \rightarrow$ บวก, ลบ diff แจกได้

$$7. \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot v' + v \cdot u' \rightarrow \text{หน้า diff หลัง} + \text{หลัง diff หน้า}$$

$$8. \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \rightarrow \frac{\text{ล่าง diff บน} - \text{บน diff ล่าง}}{(\text{ล่าง})^2}$$

$$9. \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$$

ความชันของเส้นโค้ง

1. ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ คือ $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d}{dx}f(x)$, $f'(x)$
2. ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $x = a$ คือ $f'(a)$
3. ณ จุดสัมผัสระหว่างเส้นตรงกับเส้นโค้ง จะกล่าวได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{ความชันของเส้นสัมผัส} &= \text{ความชันของเส้นโค้ง} \\ m_{\text{สัมผัส}} &= m_{\text{โค้ง}} \end{aligned}$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันเส้นโค้ง

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

1. ฟังก์ชันเพิ่ม อ้างว่า $\frac{d}{dx}y > 0 \rightarrow$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งทำมุมแหลมกับแกน x
2. ฟังก์ชันลด อ้างว่า $\frac{d}{dx}y < 0 \rightarrow$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งทำมุมป้านกับแกน x

สูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์

1. หา $f'(x)$
2. จับ $f'(x) = 0$ แล้วแก้หาค่า x ซึ่งค่า x ที่ได้เรียกค่าวิกฤต
3. วิเคราะห์ค่าวิกฤต

ปฏิยานุพันธ์

ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

1. $\int k dx = kx + c$ เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว
2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
3. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$ และ c เป็นค่าคงตัว

อินทิกรัลจำกัดเขต

1. $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
3. ถ้า $a < c < b$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
4. $\int_a^a f(x) dx = 0$
5. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

พื้นที่

1. ต้องวาดกราฟทุกครั้ง (โดยเฉพาะกราฟพาราโบลาจะใช้เยอะมาก ต้องฝึกให้คล่อง)
2. หาขอบเขตของพื้นที่ที่ต้องการ ถ้าโจทย์ไม่บอกต้องหาเอง โดยให้ใช้จุดตัดบนแกนเป็นตัวกำหนดขอบเขต
3. ถ้ารูปที่ได้มีทั้งเหนือแกน และใต้แกน ต้องแยกคิดทีละช่วง โดยที่
เหนือแกน $x : A = \int_a^b f(x) dx$
ใต้แกน $x : A = -\int_a^b f(x) dx$
4. พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น $= \int (\text{บน} - \text{ล่าง})$

ตะลุยโจทย์ เรื่อง แคลคูลัส

1. จงหาค่า C ที่ทำให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[C + \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} \right] = 6$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right] = 0$

ข. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+4x-12}{|x-2|} = -8$

ข้อใดสรุปถูกต้อง

1. ก. ถูก ข. ถูก
2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก
4. ก. ผิด ข. ผิด

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x-1 & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ 3x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1+x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(1-x)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 2
3. 4
4. 8

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{x-5} & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ \frac{x^2-4x}{x^2+5x} & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{1-x} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ข้อใดถูก

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$
2. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$
3. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$
4. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

5. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $g(x) = 2x+3$, $(f \circ g)(x) = 8x^2 - 12x + 1$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

1. -2
2. -10
3. -20
4. -40

6. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^{2k} & \text{ถ้า } x \leq 2 \\ (\sqrt{8} - 1)x^k + \sqrt{8} & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$

ถ้า k เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ จงหาค่าของ $\int_0^2 f(x) dx$

7. ให้ a เป็นจำนวนจริง

กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-9}{\sqrt{3x}-3} & , x > 3 \\ ax^2 - 6a & , x \leq 3 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้ว $f'(a)$ มีค่าเท่าใด

1. 2
2. 4
3. 8
4. 10

8. กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $b \neq 0$

ถ้า $2f'(1) = f(1)$ แล้ว $\frac{f(4)}{f'(9)}$ มีค่าเท่าใด

9. ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ซึ่งมี 1, 2, 3 เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$
และ $P(4) = 5$ แล้ว $P'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $-\frac{6}{7}$

2. $-\frac{5}{6}$

3. $\frac{4}{5}$

4. $\frac{5}{3}$

10. ถ้า f, g และ h สอดคล้องกับ $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ และ

$f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$ แล้วค่าของ $(fg+h)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1

2. 2

3. 4

4. 6

11. เส้นตรงซึ่งตัดตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด $x = 1$

คือเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

1. $13x - 2y - 11 = 0$

2. $13x + 2y - 15 = 0$

3. $2x - 13y + 11 = 0$

4. $2x + 13y - 15 = 0$

12. เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = ax + bx^2$ ที่จุด $(2, 3)$ ขนานกับเส้นตรง $3x - y - 7 = 0$

จงหาพื้นที่บริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้กับเส้นตรง $y = 3$

1. 2

2. 4

3. 8

4. 16

13. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เท่ากับ -2 ที่จุด $x = 1$ ถ้า $g(x) = x^3 + f'(x)$ แล้ว g เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0, 2)$

2. $(-3, -1)$

3. $(-1, 1)$

4. $(-2, 0)$

14. กำหนดให้ m คือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x) = |x-6|+5$ และ M คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $g(x) = \frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2 + 4$ จงหาค่าของ $m+M$

15. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(-4) = -3$ และ $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h-4)}{h} + \frac{3}{h} \right) = 12$

ถ้า $g(x) = x^2 f(x) - 3x + 1$ แล้วความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $g(x)$

ณ จุด $(-4, -35)$ มีค่าเท่าใด

1. 211
2. 213
3. 217
4. 221

16. สี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งบรรจุอยู่ในกราฟพาราโบลา $y^2 = 12x$ โดยมีด้านๆ หนึ่งอยู่บนเส้นตรง $x = 4$ จะมีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด

1. $\frac{16}{3}$
2. $\frac{32}{3}$
3. $\frac{64}{3}$
4. $\frac{128}{3}$

17. กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าสูงสุดที่ $x = 1$ ถ้า $f''(x) = -4$ ทุก x และ $f(-1) + f(3) = 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดเท่าใด

18. กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ ข้อใดถูก

1. ค่าวิกฤตของ f คือ 1 และ 2
2. f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มบนช่วง $(1, 2)$
3. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$
4. บนช่วงปิด $[0, 1]$ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 0$

19. ถ้า $f(x) = 3x + 1$ และ $\int (f^{-1} \circ g)(x) dx = x^2 + x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

แล้ว $\int_1^3 g(x) dx$ มีค่าเท่าใด

1. 12
2. 22
3. 32
4. 42

20. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x < 1 \\ ax^2, & 1 \leq x < 2 \\ 12, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{และ} \quad g(x) = bx^3 + x$$

จงหาค่าของ $a+b$ ที่ทำให้ $\int_1^a f(x) dx = g'(1)$

1. 3
2. 5
3. 7
4. 9

21. ถ้า $f(x) = \frac{x^4}{4} - x$ และ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\int_{-a}^{a^2} f''(x) dx = -\frac{1}{4}$

แล้ว $f'(a)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $-\frac{3}{2}$

22. กำหนดให้ $F(x) = 2^x + 4^x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ถ้า $\int_0^a f(x) dx = 4$

แล้ว a มีค่าเท่าใด

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

23. กำหนดให้ $f'(x) = 2x - 4$ และ $\int_1^2 f(x) dx = \frac{10}{3}$ ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง

ที่ตัดแกน y ที่จุด A และจุดต่ำสุดอยู่ที่จุด B แล้วส่วนของเส้นตรง AB ยาวเท่าใด

1. $5\sqrt{2}$

2. $3\sqrt{2}$

3. $3\sqrt{5}$

4. $2\sqrt{5}$

24. กำหนด $(f-g)(x) = 6x^2 - 4x$ และ $\int_3^5 g(x) dx = 5$

จงหาค่าของ $\int_5^{-1} g(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx$

1. 25

2. 35

3. 45

4. 55

25. กำหนดให้ $\int f(x) dx = 5x^2 + x|x-1|$ จงหาค่าของ $f(-2) + f(2)$

1. 0

2. 2

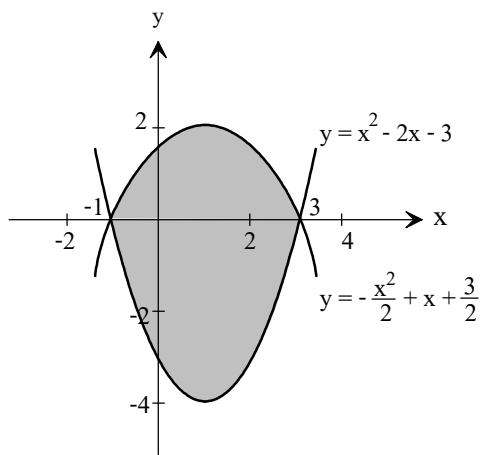
3. 4

4. 8

26. ค่าของ $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (กำหนดให้ $\pi = 3.14$)

1. (3.1 , 3.2)
2. (3.2 , 3.3)
3. (6.1 , 6.2)
4. (6.2 , 6.3)

27. จงหาพื้นที่ของบริเวณส่วนที่แรเงาในรูปต่อไปนี้



28. กำหนด $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ แล้วพื้นที่ระหว่าง กราฟ $y = f(x)$ กับแกน x เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือ แกน x ในช่วง $-a \leq x \leq 0$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. 5
2. 6
3. 7
4. 8

29. Let f be the differentiable real - valued function defined on the positive real numbers. The tangent lines to the graph of f always meet the y -axis 1 unit lower than where they meet the function. If $f(1) = 0$, what is $f(2)$?
1. $\ln 2$
 2. $\ln 3$
 3. $\log 2$
 4. $\log 3$
30. Determine the positive value of a such that the parabola $y = x^2 + 1$ bisects the area of the rectangle with vertices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a^2 + 1)$ and $(a, a^2 + 1)$
1. 2
 2. 3
 3. $\sqrt{2}$
 4. $\sqrt{3}$