

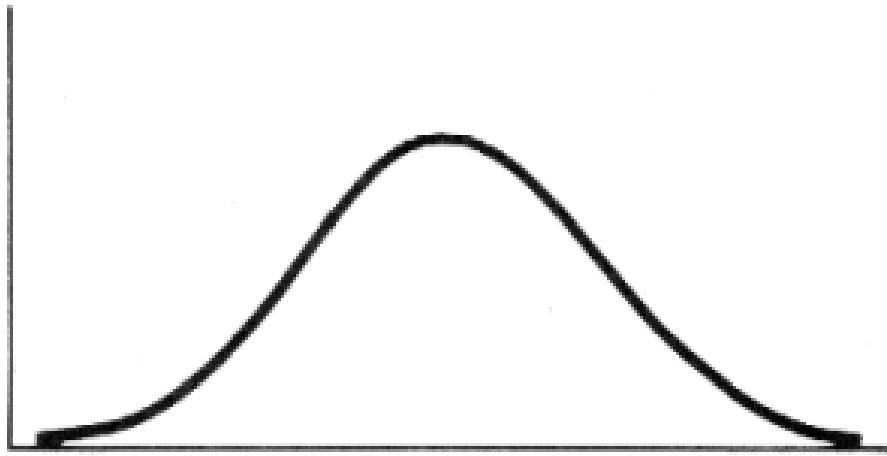


วิชาคณิตศาสตร์

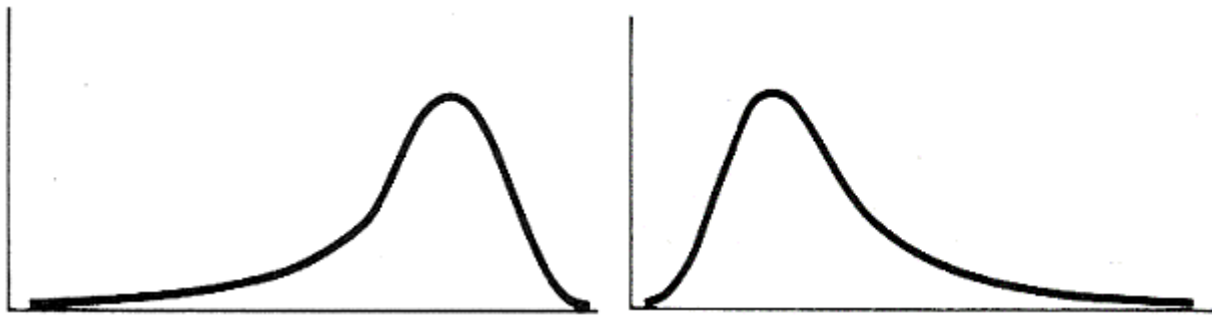
โดย

อ.ธนาวัฒน์ เอี่ยมอำไพ

พื้นที่ใต้โค้ง การแจกแจงปกติ และ ค่ามาตรฐาน



โค้ง.....



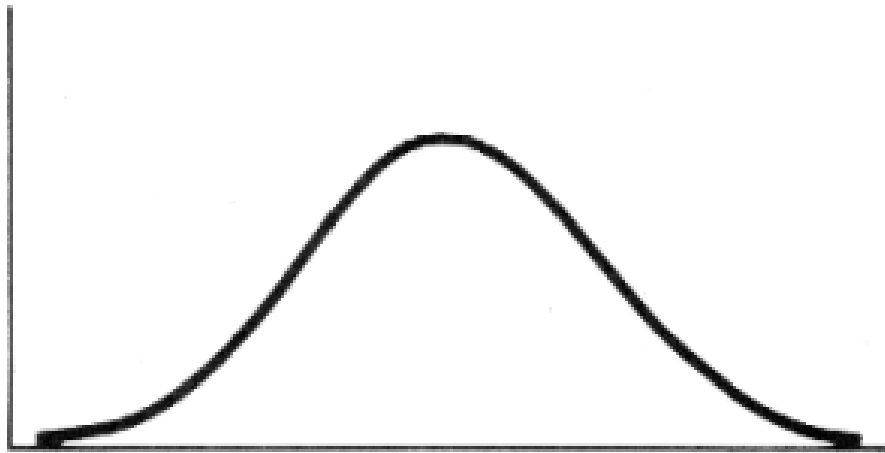
โค้ง.....

โค้ง.....

ตารางเปรียบเทียบระหว่างค่ามาตรฐาน (Z) กับ พื้นที่ใต้โค้ง (A)

| <i>z</i> | <i>A</i> | <i>z</i> | <i>A</i> | <i>z</i> | <i>A</i> | <i>z</i> | <i>A</i> | <i>z</i> | <i>A</i> | <i>z</i> | <i>A</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.00 | .0000 | 0.52 | .1985 | 1.04 | .3508 | 1.56 | .4406 | 2.08 | .4812 | 2.60 | .4953 |
| 0.01 | .0040 | 0.53 | .2019 | 1.05 | .3531 | 1.57 | .4418 | 2.09 | .4817 | 2.61 | .4955 |
| 0.02 | .0080 | 0.54 | .2054 | 1.06 | .3554 | 1.58 | .4429 | 2.10 | .4821 | 2.62 | .4956 |
| 0.03 | .0120 | 0.55 | .2088 | 1.07 | .3577 | 1.59 | .4441 | 2.11 | .4826 | 2.63 | .4957 |
| 0.04 | .0160 | 0.56 | .2123 | 1.08 | .3599 | 1.60 | .4452 | 2.12 | .4830 | 2.64 | .4959 |
| 0.05 | .0199 | 0.57 | .2157 | 1.09 | .3621 | 1.61 | .4463 | 2.13 | .4834 | 2.65 | .4960 |
| 0.06 | .0239 | 0.58 | .2190 | 1.10 | .3643 | 1.62 | .4474 | 2.14 | .4838 | 2.66 | .4961 |
| 0.07 | .0279 | 0.59 | .2224 | 1.11 | .3665 | 1.63 | .4484 | 2.15 | .4842 | 2.67 | .4962 |
| 0.08 | .0319 | 0.60 | .2257 | 1.12 | .3686 | 1.64 | .4495 | 2.16 | .4846 | 2.68 | .4963 |
| 0.09 | .0359 | 0.61 | .2291 | 1.13 | .3708 | 1.65 | .4505 | 2.17 | .4850 | 2.69 | .4964 |
| 0.10 | .0398 | 0.62 | .2324 | 1.14 | .3729 | 1.66 | .4515 | 2.18 | .4854 | 2.70 | .4965 |
| 0.11 | .0438 | 0.63 | .2357 | 1.15 | .3749 | 1.67 | .4525 | 2.19 | .4857 | 2.71 | .4966 |
| 0.12 | .0478 | 0.64 | .2389 | 1.16 | .3770 | 1.68 | .4535 | 2.20 | .4861 | 2.72 | .4967 |
| 0.13 | .0517 | 0.65 | .2422 | 1.17 | .3790 | 1.69 | .4545 | 2.21 | .4864 | 2.73 | .4968 |
| 0.14 | .0557 | 0.66 | .2454 | 1.18 | .3810 | 1.70 | .4554 | 2.22 | .4868 | 2.74 | .4969 |
| 0.15 | .0596 | 0.67 | .2486 | 1.19 | .3830 | 1.71 | .4564 | 2.23 | .4871 | 2.75 | .4970 |
| 0.16 | .0636 | 0.68 | .2517 | 1.20 | .3849 | 1.72 | .4573 | 2.24 | .4875 | 2.76 | .4971 |
| 0.17 | .0675 | 0.69 | .2549 | 1.21 | .3869 | 1.73 | .4582 | 2.25 | .4878 | 2.77 | .4972 |
| 0.18 | .0714 | 0.70 | .2580 | 1.22 | .3888 | 1.74 | .4591 | 2.26 | .4881 | 2.78 | .4973 |
| 0.19 | .0753 | 0.71 | .2611 | 1.23 | .3907 | 1.75 | .4599 | 2.27 | .4884 | 2.79 | .4974 |
| 0.20 | .0793 | 0.72 | .2642 | 1.24 | .3925 | 1.76 | .4608 | 2.28 | .4887 | 2.80 | .4974 |
| 0.21 | .0832 | 0.73 | .2673 | 1.25 | .3944 | 1.77 | .4616 | 2.29 | .4890 | 2.81 | .4975 |
| 0.22 | .0871 | 0.74 | .2704 | 1.26 | .3962 | 1.78 | .4625 | 2.30 | .4893 | 2.82 | .4976 |
| 0.23 | .0910 | 0.75 | .2734 | 1.27 | .3980 | 1.79 | .4633 | 2.31 | .4896 | 2.83 | .4977 |
| 0.24 | .0948 | 0.76 | .2764 | 1.28 | .3997 | 1.80 | .4641 | 2.32 | .4898 | 2.84 | .4977 |
| 0.25 | .0987 | 0.77 | .2794 | 1.29 | .4015 | 1.81 | .4649 | 2.33 | .4901 | 2.85 | .4978 |
| 0.26 | .1026 | 0.78 | .2823 | 1.30 | .4032 | 1.82 | .4656 | 2.34 | .4904 | 2.86 | .4979 |
| 0.27 | .1064 | 0.79 | .2852 | 1.31 | .4049 | 1.83 | .4664 | 2.35 | .4906 | 2.87 | .4979 |
| 0.28 | .1103 | 0.80 | .2881 | 1.32 | .4066 | 1.84 | .4671 | 2.36 | .4909 | 2.88 | .4980 |

| z | A | z | A | z | A | z | A | z | A | z | A |
|------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|
| 0.29 | .1141 | 0.81 | .2910 | 1.33 | .4082 | 1.85 | .4678 | 2.37 | .4911 | 2.89 | .4981 |
| 0.30 | .1179 | 0.82 | .2939 | 1.34 | .4099 | 1.86 | .4686 | 2.38 | .4913 | 2.90 | .4981 |
| 0.31 | .1217 | 0.83 | .2967 | 1.35 | .4115 | 1.87 | .4693 | 2.39 | .4916 | 2.91 | .4982 |
| 0.32 | .1255 | 0.84 | .2995 | 1.36 | .4131 | 1.88 | .4699 | 2.40 | .4918 | 2.92 | .4982 |
| 0.33 | .1293 | 0.85 | .3023 | 1.37 | .4147 | 1.89 | .4706 | 2.41 | .4920 | 2.93 | .4983 |
| 0.34 | .1331 | 0.86 | .3051 | 1.38 | .4162 | 1.90 | .4713 | 2.42 | .4922 | 2.94 | .4984 |
| 0.35 | .1368 | 0.87 | .3078 | 1.39 | .4177 | 1.91 | .4719 | 2.43 | .4925 | 2.95 | .4984 |
| 0.36 | .1406 | 0.88 | .3106 | 1.40 | .4192 | 1.92 | .4726 | 2.44 | .4927 | 2.96 | .4985 |
| 0.37 | .1443 | 0.89 | .3133 | 1.41 | .4207 | 1.93 | .4732 | 2.45 | .4929 | 2.97 | .4985 |
| 0.38 | .1480 | 0.90 | .3159 | 1.42 | .4222 | 1.94 | .4738 | 2.46 | .4931 | 2.98 | .4986 |
| 0.39 | .1517 | 0.91 | .3186 | 1.43 | .4236 | 1.95 | .4744 | 2.47 | .4932 | 2.99 | .4986 |
| 0.40 | .1554 | 0.92 | .3212 | 1.44 | .4251 | 1.96 | .4750 | 2.48 | .4934 | 3.00 | .4987 |
| 0.41 | .1591 | 0.93 | .3238 | 1.45 | .4265 | 1.97 | .4756 | 2.49 | .4936 | 3.01 | .4987 |
| 0.42 | .1628 | 0.94 | .3264 | 1.46 | .4279 | 1.98 | .4761 | 2.50 | .4938 | 3.02 | .4987 |
| 0.43 | .1664 | 0.95 | .3289 | 1.47 | .4292 | 1.99 | .4767 | 2.51 | .4940 | 3.03 | .4988 |
| 0.44 | .1700 | 0.96 | .3315 | 1.48 | .4306 | 2.00 | .4772 | 2.52 | .4941 | 3.04 | .4988 |
| 0.45 | .1736 | 0.97 | .3340 | 1.49 | .4319 | 2.01 | .4778 | 2.53 | .4943 | 3.05 | .4989 |
| 0.46 | .1772 | 0.98 | .3365 | 1.50 | .4332 | 2.02 | .4783 | 2.54 | .4945 | 3.06 | .4989 |
| 0.47 | .1808 | 0.99 | .3389 | 1.51 | .4345 | 2.03 | .4788 | 2.55 | .4946 | 3.07 | .4989 |
| 0.48 | .1844 | 1.00 | .3413 | 1.52 | .4357 | 2.04 | .4793 | 2.56 | .4948 | 3.08 | .4990 |
| 0.49 | .1879 | 1.01 | .3438 | 1.53 | .4370 | 2.05 | .4798 | 2.57 | .4949 | 3.09 | .4990 |



1. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $Z = 0.45$

2. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $Z = 1.28$

3. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $Z = 2.12$

4. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $Z = -0.41$

5. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $A = 0.8365$ พร้อมทั้งหาค่า Z

6. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $P_{74.54}$ พร้อมทั้งหาค่า Z

7. จงวาดกราฟ และ แรเงาพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อ $P_{36.69}$ พร้อมทั้งหาค่า Z

8. จงหาพื้นที่ใต้โค้งมาตรฐาน ตั้งแต่ $Z = -1.04$ ถึง 1.25

9. จงหาพื้นที่ใต้โค้งมาตรฐาน ตั้งแต่ $Z = 1.12$ ถึง 1.98

10. จงหาพื้นที่ใต้โค้งมาตรฐาน เมื่อ $Z \leq -1.52$

11. จงหาค่า Z ที่ทำให้พื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับ 0.8621

12. จงหาค่า k ที่ทำให้ $Z \geq k$ มีพื้นที่ 0.3859

13. จงหาค่า k ที่ทำให้ $Z \leq k$ มีพื้นที่ 0.6628

14. จงหาค่า Z ของ $P_{34.46}$

ความสัมพันธ์ของค่ามาตรฐาน

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

15. คะแนนสอบของนักเรียน 80,000 คน มีการแจกแจงแบบปกติ พบว่า $\bar{x} = 58$ คะแนน และ $S = 4$ คะแนน จงหาว่ามีนักเรียนกี่เปอร์เซ็นต์ และ กี่คนที่สอบได้คะแนนในช่วง 53 - 66 คะแนน ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง Z เป็นดังนี้

| | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| Z | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 |
| พื้นที่ใต้เส้นโค้ง | 0.3944 | 0.4332 | 0.4599 | 0.4772 |

16. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ พบว่า $\bar{x} = 66$ คะแนน และ $S = 10$ คะแนน จงหาว่าเปอร์เซ็นต์ที่ 26.76 เท่ากับกี่คะแนน กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานเป็นดังนี้

| | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| Z | 0.61 | 0.62 | 0.73 | 0.74 |
| พื้นที่ใต้เส้นโค้ง | 0.2291 | 0.2324 | 0.2673 | 0.2704 |

ลิมิตของฟังก์ชัน

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ อ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ”
หมายถึง “ค่าประมาณของ $f(x)$ เมื่อ x ประมาณ a ”

1. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} 2x + 5$

2. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 7$

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 2x + 3$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -1} 2^x + 3$

การหาค่าลิมิตที่มีบางค่าเป็น 0

■ $\frac{\quad}{0}$ ถ้าตัวตั้งไม่เป็น 0 แต่ตัวหารเป็น 0 ตอบว่า “หาค่าไม่ได้”

■ $\frac{0}{\quad}$ ถ้าตัวตั้งเป็น 0 แต่ตัวหารไม่เป็น 0 ตอบว่า “0”

■ $\frac{0}{0}$ ถ้าตัวตั้งเป็น 0 และ ตัวหารเป็น 0 “จัดรูป f(x) ใหม่”

5. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$

6. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1+x}$

7. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}$

8. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-x-2}$

9. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+2x+2}$

10. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}$

11. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27}$

12. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-1}$

ลิมิตทางซ้าย – ลิมิตทางขวา

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ อ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ด้านซ้าย”
 หมายถึง “ค่าประมาณของ $f(x)$ เมื่อ x น้อยกว่า a นิดๆ”

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ อ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ด้านขวา”
 หมายถึง “ค่าประมาณของ $f(x)$ เมื่อ x มากกว่า a นิดๆ”

ซึ่งลิมิตจะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ ลิมิตด้านซ้าย , ลิมิตด้านขวา หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

13. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

14. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x < -1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

“ไม่มีความสำเร็จใด ได้มาโดยไม่พยายาม”

Facebook : KruPearthOfficial