



คณิตศาสตร์

โดย อ.นันทวัน มั่นจิตร

บทที่ 1. เซต

ความหมายของเซต ในวิชาคณิตศาสตร์ ใช้คำว่าเซตในการกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ ซึ่งเมื่อกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งใดแล้วจะต้องสามารถระบุได้อย่างชัดเจนแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในเซตและสิ่งใดไม่อยู่ในเซต สิ่งที่อยู่ในเซตเรียกว่าสมาชิก (element) ของเซต ใช้สัญลักษณ์ $a \in A$ แทน a เป็นสมาชิกของเซต A และ $a \notin A$ แทน a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

เซตว่าง หมายถึงเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยใช้สัญลักษณ์ $\emptyset$ หรือ $\{ \}$ แทนเซตว่าง

เซตจำกัดและเซตอนันต์ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0 หรือจำนวนเต็มบวกใดๆ เรียกว่า**เซตจำกัด** และเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัดเรียกว่า**เซตอนันต์** ในกรณีที่ A เป็นเซตจำกัดจะใช้สัญลักษณ์ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของ A

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกในการเขียนเซตของจำนวนจะกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

R	=	เซตของจำนวนจริง	N	=	เซตของจำนวนนับ
I	=	เซตของจำนวนเต็ม	Q	=	เซตของจำนวนตรรกยะ
I^+	=	เซตของจำนวนเต็มบวก	Q^+	=	เซตของจำนวนตรรกยะบวก
I^-	=	เซตของจำนวนเต็มลบ	Q^-	=	เซตของจำนวนตรรกยะลบ

สับเซต (subset)

นิยาม เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ใช้สัญลักษณ์

$A \subset B$ แทน A เป็นสับเซตของ B และ $A \not\subset B$ แทน A ไม่เป็นสับเซตของ B

เซตที่เท่ากัน (Equal set or Identical set)

นิยาม เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$ ใช้สัญลักษณ์ $A = B$

ในกรณีที่ $A \subset B$ และ $A \neq B$ จะกล่าวว่า A เป็นสับเซตแท้ (Proper subset) ของ B

แต่ถ้า $A = B$ จะกล่าวว่า A เป็นสับเซตไม่แท้ (Improper subset) ของ B

เพาเวอร์เซต (Power set)

นิยาม ให้ A เป็นเซต เพาเวอร์เซตของ A หมายถึง $\{x | x \subset A\}$

ใช้สัญลักษณ์ $P(A)$ แทนเพาเวอร์เซตของ A

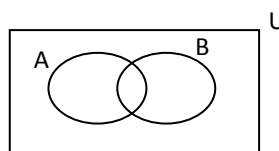
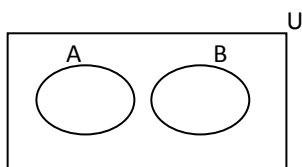
ข้อสรุปเพาเวอร์เซต กำหนด A เป็นเซตใดๆ จะได้ว่า

- $\emptyset \in P(A)$ และ $\{\emptyset\} \subset P(A)$
- $A \in P(A)$ และ $\{A\} \subset P(A)$
- ถ้า $n(A) = m$ แล้ว $n(P(A)) = 2^m$
- ถ้า $n(A) = m$ แล้ว $n(P(P(A))) = 2^{2^m}$

แผนภาพเวเน – ออยเลอร์ คือ การเขียนเซตในรูปปิดที่มีพื้นที่จำกัด ซึ่งมีลักษณะดังนี้

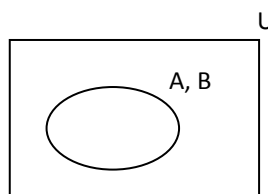
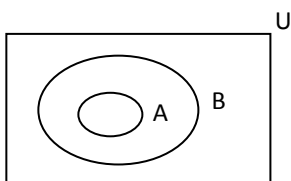
1) A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

2) A และ B มีสมาชิกร่วมกัน



3) $A \subset B$ และ $A \neq B$

4) $A \subset B$ แต่ $A = B$



จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด ทำได้ 2 วิธี คือ

1. โดยใช้แผนภาพเวเน่ - ออยเลอร์
2. โดยใช้สูตร ดังนี้ กำหนดให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A, B และ C เป็นเซตจำกัด ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของ U

2.1 ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2.2 ถ้า $A \cap B \neq \emptyset$ แล้ว $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2.3 ถ้า A, B และ C เป็นเซตจำกัดใด ๆ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ตัวอย่างเพิ่มความเชี่ยวชาญ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A - B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $P(B - A)$ คือข้อใด

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
2. $\{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$
3. $\{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}\}$
4. $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } -6 < x^2 + 5x < 14\}$ จงหา $n(P(A))$

1. 16
2. 64
3. 256
4. 1024

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตซึ่ง $n(A \cup B) = 88$ และ $n[(A - B) \cup (B - A)] = 76$ และ $n(A) = 45$ แล้ว $n(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 45
2. 48
3. 53
4. 55

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, 10 \}$ ถ้า $A = \{ 1, 2, 5, 6, 9, 10 \}$ และ $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ แล้วสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ $[(A \cap B') \cup B]'$ มีจำนวนเท่ากับข้อใด

1. 2 2. 4 3. 8 4. 16

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $P(P(A))$ มีสมาชิก 256 ตัวแล้ว ข้อใดคือจำนวนสมาชิกของเซต A

1. 16 2. 6 3. 4 4. 3

ตัวอย่างที่ 6 จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่งพบว่า

- ก) มี 40 คน ที่เลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษหรือคณิตศาสตร์
 - ข) ถ้าเลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์แล้วต้องไม่เลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษ
 - ค) มี 30 คน ที่ไม่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์
 - ง) มี 34 คน ที่ไม่เลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษ
- จำนวนนักเรียนทั้งหมดในห้องนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 48 คน 2. 49 คน 3. 50 คน 4. 51 คน 5. 52 คน

ตัวอย่างที่ 7 ในการสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นห้องหนึ่งพบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 35 คน วิชาภาษาไทย 42 คน และวิชาสังคมศึกษา 47 คน และมีผู้ที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และสังคมศึกษา 13 คน ผู้ที่สอบผ่านวิชาสังคมศึกษาและภาษาไทยมี 15 คน ผู้ที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และภาษาไทยมี 10 คน และผู้ที่สอบผ่านทั้งสามวิชา 8 คน ข้อใดต่อไปนี้คือจำนวนผู้ที่สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา

1. 93 2. 94 3. 95 4. 96 5. 97

บทที่ 2. ระบบจำนวนจริง

สมบัติของจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ $a + b \in \mathbb{R}$	สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ $ab \in \mathbb{R}$
สลับที่	สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ $a + b = b + a$	สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ $ab = ba$
เปลี่ยนกลุ่ม	สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ $(a + b) + c = a + (b + c)$	สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ $(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์ นั่นคือ มีจำนวนจริง 0 ซึ่งสำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $a + 0 = a = 0 + a$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์ นั่นคือ มีจำนวนจริง 1 ซึ่งสำหรับจำนวนจริง a ใดๆ $1(a) = a = a(1)$
การมีอินเวอร์ส	อินเวอร์สของ a คือ $-a$ นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่ง $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	อินเวอร์สของ a ซึ่ง $a \neq 0$ คือ $\frac{1}{a}$ นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ซึ่ง $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{a}$ ซึ่ง $a(\frac{1}{a}) = 1 = (\frac{1}{a})a$
การแจกแจง	สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ $a(b + c) = ab + ac$	

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem) : พหุนาม $P(x)$ หาด้วย $x - a$ จะมีเศษเหลือเท่ากับ $P(a)$

โดยอาศัยทฤษฎีบทเศษเหลือจะได้ว่าพหุนาม $P(x)$ หาด้วย $ax + b$ จะมีเศษเหลือเท่ากับ $P\left(\frac{-b}{a}\right)$

ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ : ถ้า $x - \frac{a}{b}$ โดยที่ ห.ร.ม. $(a, b) = 1$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{แล้ว } a \mid a_0 \text{ และ } b \mid a_n$$

การแก้อสมการ

- สมบัติที่สำคัญ**
- ถ้าคูณหรือหารด้วยจำนวนลบทั้ง 2 ข้าง อสมการเดิมต้องเปลี่ยนความหมายเป็นตรงข้าม
 - อสมการโดยทั่วไปไม่มีกฎการคูณไขว้ (ยกเว้นรู้เครื่องหมายตัวที่จะคูณไขว้)

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

นิยาม $|a| = a$ เมื่อ $a \geq 0$ และ $|a| = -a$ เมื่อ $a \leq 0$

ตัวอย่างเพิ่มความเชี่ยวชาญ

ตัวอย่างที่ 8 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง $A = \{x \in R \mid 3x^2 + x - 2 > 0\}$ และ $B = \{x \in R \mid |3 - 2x| \leq 4\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $B - A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

ข. $A \cup B' = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ $A = \{x \in R \mid 2|x + 2| < |x + 3|\}$,

$B = \{x \in R \mid \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \leq 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \subset B$

2. $B \subset A$

3. $A' \subset B$

4. $B \subset A'$

ตัวอย่างที่ 10 R เป็นเซตของจำนวนจริง เซตคำตอบของสมการ $\frac{x^4}{x^2-1} \geq x^2 + 1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
2. $R - \{-1, 1\}$
3. $(-1, 1)$
4. R

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า $A = \{x \in I^+ \mid x \text{ เป็นคำตอบของสมการ } x^2 - 4x \leq 5\}$ และ

$$B = \{x \in I \mid x \text{ เป็นคำตอบของสมการ } x^2 - 2x - 8 < 0\}$$

เมื่อ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \times B$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 12 ถ้าทราบว่า $\frac{1}{2}$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $8x^3 - 6x^2 - 35x + 18 = 0$ รากที่มีค่ามากที่สุดของสมการนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....