



คณิตศาสตร์ อาจารย์เจี๊ย

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่าง

1. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
3. $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

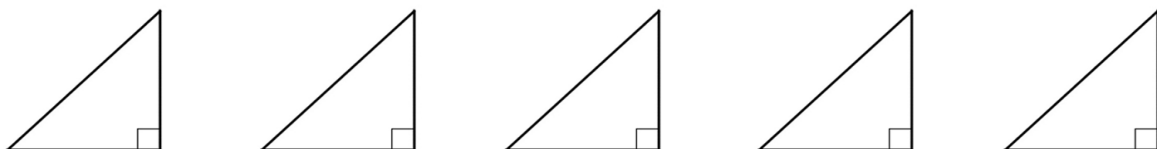
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม n เท่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 2 เท่า
$\begin{aligned}\sin 2A &= 2\sin A \cos A \\ &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}\end{aligned}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ครึ่งเท่า
$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}\end{aligned}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ มุม 3 เท่า
$\begin{aligned}\sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}\end{aligned}$

Tip...



Ex.1 ถ้า $\sin 2A = \frac{24}{25}$ แล้ว $\cos^4 A + \sin^4 A$ เท่ากับ

1. $\frac{337}{625}$

2. $\frac{567}{625}$

3. $\frac{674}{625}$

4. $\frac{697}{625}$

Ex.2 กำหนดให้ $5\cos 3A \cos A + 5\sin 3A \sin A = -3$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$
ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\tan A$

1. $\frac{1}{2}$

2. 1

3. $\frac{3}{2}$

4. 2

Ex.3 ถ้า $\tan A = \frac{1}{7}$ และ $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$ เมื่อ A และ B เป็น มุมแหลม แล้ว $\tan(A + 2B)$
เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.

2. 1

3. $\frac{3}{2}$

4. 2

Ex.4 กำหนด $\cos A = \frac{4}{5}$ และ $\sin B = \frac{4}{5}$ เมื่อ A, B และ $0 \leq A + B \leq \frac{\pi}{2}$

ข้อใดคือค่าของ $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ex.5 จงหาค่าของ $4\tan\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

1. -1

2. -2

3. -3

4. -4

Ex.6 จงหาค่าของ $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5})$

1. -1

2. 1

3. $\frac{24}{25}$

4. $-\frac{24}{25}$

Ex.7 ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2. 1

3. $\frac{4}{3}$

4. $-\frac{4}{3}$

Ex.8 ค่าของ $\sin(\frac{\arctan \frac{3}{4}}{2}) + \cos(2\arcsin \frac{3}{5})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{6}{25}$

2. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{6}{25}$

3. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25}$

4. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{7}{25}$

Ex.9 ค่าของ $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ เท่ากับเท่าไร

1. $\frac{5}{6}$

2. $\frac{6}{5}$

3. $\frac{\pi}{6}$

4. $\frac{\pi}{4}$

Ex.10 ถ้า $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\tan(\arcsin x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1. $\frac{1}{5}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $\frac{1}{2}$

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

นิยาม... ลำดับเลขคณิตคือลำดับที่มีผลต่างร่วม d คงที่

ลำดับทั่วไป $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

ลำดับเลขคณิต $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

สูตรดังกล่าวเป็นการหาพจน์ที่ n หากสังเกตให้ดี เรามีหลักคิดที่เราเคยเรียนเร็วกว่ามาก แต่ที่ต้องให้เรียน เพราะโจทย์บางข้อยังคงจำเป็นต้องใช้นิยามดังกล่าว

Tip...

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนั้นทำได้ง่าย มากๆ ดังนี้

$$a_n = dn \text{ เป็นพจน์แรก}$$

Ex.1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้อย่างรวดเร็วที่สุด

1. $11, 13, 15, 19, \dots$ $a_n = \dots$

2. $2, -1, -4, -7, -10, \dots$ $a_n = \dots$

3. $7, 10, 13, 16, 19, \dots$ $a_n = \dots$

Ex.2 พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต $200, 182, 164, 146, \dots$

มีค่าต่างจากพจน์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent'40)

1. 54

2. 38

3. 22

4. 20

Tip...

๑ จริงๆ แล้วการที่เราจะหาพจน์ใดก็ตามจะหาได้จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

แต่การที่โจทย์ไม่บอก a_1 และ d มาตรงๆ นั้น ทำให้เราต้องหาพจน์ที่ต้องการต้องเสียเวลาดังสมการ

2 สมการเพื่อหาค่า a_1 และ d ให้เจอก่อน

๑ จากปัญหาดังกล่าวถ้าเราหัดเป็นคนช่างสังเกต เราจะหาพจน์ที่ต้องการได้เร็วกว่าดังนี้

$$a_1 \xleftarrow{(1-k)d} a_k \xrightarrow{(m-k)d} a_m \xrightarrow{(n-m)d} a_n$$

ขั้นที่ 1 หา d ได้จาก $(m-k)d = a_m - a_k$

ขั้นที่ 2 หาพจน์ที่ต้องการได้จาก $a_n = a_m + (n-m)d$

Ex.3 จงฝึกทำโจทย์ต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

โจทย์	ขั้นที่ 1 หา d $(m-k)d = a_m - a_k$	ขั้นที่ 2 $a_n = a_m + (n-m)d$
1. พจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_4 = 32$ และ $a_9 = 42$		
2. พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_4 = 26$ และ $a_9 = 61$		
3. พจน์ที่ 18 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_7 = 26$ และ $a_{13} = 80$		
4. พจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_{17} = 104$ และ $a_{23} = 140$		

การหาจำนวนพจน์

การหาจำนวนพจน์ของลำดับเลขคณิต ถ้าไม่มีเทคนิคแล้วถือว่าไม่ใช่เรื่องง่ายเลย แต่ถ้ามีเทคนิค และใช้เทคนิคเป็นแล้ว เรื่องนี้ก็ถือว่าเป็นโจทย์ที่เราตอบได้เร็วมากจนเพื่อนๆ จงนได้โดยแหละ เพื่อให้ง่าย และใช้ได้ในทุกกรณีแล้ว เราจะแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มดังนี้

	เลขที่เรียงต่อเนื่อง	เลขที่เรียงไม่ต่อเนื่อง (ลำดับหรืออนุกรม)
สรุปสูตร ถัด	$n = \frac{X_{\max}}{d} - \frac{X_{\min}}{d}$	$n = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{d} + 1$
ตัวอย่าง	เซตของจำนวน 4, 5, 6, ..., 9, 100 ที่ 3 หารลงตัว	ลำดับ 4, 7, 10, ..., 100

	เลขที่เรียงต่อเนื่อง	เลขที่เรียงไม่ต่อเนื่อง (ลำดับหรืออนุกรม)
๑ ถ้าเป็นเลขที่เรียงโจทยจะสั่ง เองให้ หารอะไรลงตัว ๑ ถ้าเป็นลำดับจะต้องรู้ค่า d เอง	ต้องเสียเวลาหา $a_1 = 6$ $a_n = 99$	ใช้ได้ทันที $a_1 = 4$ $a_n = 100$
คำนวณหาจำนวนพจน์จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$	จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ $a_1 = 6, d = 3$ และ $a_n = 99$ จะได้ $99 = 6 + (n-1)3$ $= 6 + 3n - 3$ $3n = 96$ $n = 32$	จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ $a_1 = 4, d = 3$ และ $a_n = 100$ จะได้ $100 = 4 + (n-1)3$ $= 4 + 3n - 3$ $3n = 99$ $n = 33$
คำนวณหาจำนวนพจน์อีกที		

ข้อควรระวังสำหรับจำนวนพจน์ของลำดับที่มี $d \neq 1$ (เลขที่เรียงต่อเนื่อง)

1. d ที่ใช้เป็นตัวหารนั้นต้องแยกกัน แม้ในทางพีชคณิตจะสามารถรวมกันได้แต่ก็ห้ามทำ
2. ถ้ามีเศษเหลือจากการหารต้องปิดทึงเสมอ ยกเว้นหารลงตัวให้ไปคู่อข้อ 3. ต่อ
3. ถ้า $\frac{x_{\min}}{d}$ หรือ $\frac{x_{\min} + 1}{d}$ หารด้วย d ลงตัวแล้วจำนวนพจน์ที่ได้จะต้องบวกเพิ่มอีก 1 เสมอ

Ex.4 จงหาจำนวนพจน์อย่างรวดเร็ว

โจทย์	จำนวนพจน์
1. $[10^2, 10^4]$ มีทั้งหมดกี่พจน์ที่หาร 9 ลงตัว	
2. $[100, 500]$ มีทั้งหมดกี่พจน์ที่หาร 7 ลงตัว	
3. 2, 9, 16, 23, ..., 695	
4. 5, 9, 13, 17, ..., 113	

Ex.5 ถ้า $s = \{ 200, 201, 202, \dots, 400 \}$ แล้วจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเซต s ที่หารด้วย 8 ลงตัวแต่หารด้วย 12 ไม่ลงตัวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 15 | 2. 18 |
| 3. 21 | 4. 24 |

Ex.6 จำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 100 ถึง 999 ที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัวมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

- | | |
|--------|--------|
| 1. 250 | 2. 283 |
| 3. 300 | 4. 303 |

ทฤษฎีของลิมิต

ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ C เป็นค่าคงที่แล้ว

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{เมื่อ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

สูตรลัดลิมิตของลำดับ

สูตรลัดทั่วไป	Tip...(ดีกว่าสูตรลัดทั่วไป)
กำหนดให้ a_n อยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามหารกัน 1. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ = กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	
2. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ $>$ กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	
3. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ $<$ กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	

Ex.7 จงฝึกหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1}$ = 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n^2 + 1}$ =	3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 7n^3}{6 - 5n + 2n^2 - n^4}$ = 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^3 + 5n^2 - 1}{25n^3 - 16}}$ =
--	---

Ex.8 ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n^2 - 4} - \frac{n^2}{3n + 2} \right)$ เป็นเท่าใด

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. 0 | 2. $\frac{2}{9}$ |
| 3. $\frac{1}{3}$ | 4. ไม่มีลิมิต |

Ex.9 กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n} \right) = 5$

ถ้า $a_9 + a_5 = 100$ แล้ว a_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

- | | |
|--------|----------------------------------|
| 1. 500 | 2. 515 |
| 3. 520 | 4. หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ |

Ex.10 ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n} \right) = 4$ แล้ว $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$

มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

Tip...

ถ้าลำดับที่โจทย์กำหนดเป็นลำดับตรรกยะมากกว่า โดยมี.....ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการบวกกันอนันต์พจน์ เราต้องบวกกันโดยใช้สูตรของซิกม่าให้สำเร็จก่อนจึงจะใช้สูตรลดเคิม

Ex.11 จงหาขีดต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^4 + 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3} \right)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \right)$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} \right)$

Ex.12 สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 4$ กำหนดให้ $a_n = \frac{n^4 + 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}$

ลำดับ a_n เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้ (Ent'39)

- | | |
|----------------|--------------------------|
| 1. มีขีดเป็น 1 | 2. มีขีดเป็น 2 |
| 3. มีขีดเป็น 4 | 4. เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ |

Ex.13 ถ้า $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^k}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว ค่าของ A

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.ค. 52)

- | | |
|------|------|
| 1. 0 | 2. 2 |
| 3. 4 | 4. 8 |

Ex.14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 12n + 27n + \dots + 3n^3}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ค.ค. 52)