



## คณิตศาสตร์

อ.ชัยรัตน์ เจริญราษฎร์ (อ.เจี๋ย)

**ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่าง**

1.  $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
2.  $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
3.  $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

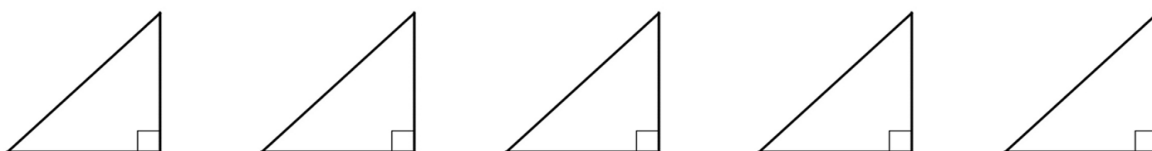
**ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม n เท่า**

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 2 เท่า
$\begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \end{aligned}$ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ครึ่งเท่า
$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \end{aligned}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ มุม 3 เท่า
$\begin{aligned} \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \end{aligned}$

**Tip...**



**Ex.1** ถ้า  $\sin 2A = \frac{24}{25}$  แล้ว  $\cos^4 A + \sin^4 A$  เท่ากับ

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{337}{625}</math></li> <li>3. <math>\frac{674}{625}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>2. <math>\frac{567}{625}</math></li> <li>4. <math>\frac{697}{625}</math></li> </ol> |
|--|--|

$$0 < A < \frac{\pi}{2}$$

**Ex.2** กำหนดให้  $5\cos 3A \cos A + 5\sin 3A \sin A = -3$  เมื่อ  
 ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ  $\tan A$

- |                  |      |
|------------------|------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 2. 1 |
| 3. $\frac{3}{2}$ | 4. 2 |

**Ex.3** ถ้า  $\tan A = \frac{1}{7}$  และ  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$  เมื่อ  $A$  และ  $B$  เป็น มุมแหลม แล้ว  $\tan(A + 2B)$   
 เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- |                  |      |
|------------------|------|
| 1.               | 2. 1 |
| 3. $\frac{3}{2}$ | 4. 2 |

**Ex.4** กำหนด  $\cos A = \frac{4}{5}$  และ  $\sin B = \frac{4}{5}$  เมื่อ  $A, B$  และ  $0 \leq A + B \leq \frac{\pi}{2}$

ข้อใดคือค่าของ  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\frac{1}{3}$        | 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |

**Ex.5** จงหาค่าของ  $4\tan\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

- |       |       |
|-------|-------|
| 1. -1 | 2. -2 |
| 3. -3 | 4. -4 |

**Ex.6** จงหาค่าของ  $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$

- |                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| 1. -1              | 2. 1                |
| 3. $\frac{24}{25}$ | 4. $-\frac{24}{25}$ |

$\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

Ex.7 ค่าของ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2. 1

3.  $\frac{4}{3}$

4.  $-\frac{4}{3}$

Ex.8 ค่าของ  $\sin\left(\frac{\arctan\frac{3}{4}}{2}\right) + \cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{6}{25}$

2.  $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{6}{25}$

3.  $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25}$

4.  $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{7}{25}$

Ex.9 ค่าของ  $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$  เท่ากับเท่าไร

1.  $\frac{5}{6}$

2.  $\frac{6}{5}$

3.  $\frac{\pi}{6}$

4.  $\frac{\pi}{4}$

Ex.10 ถ้า  $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$  แล้วค่าของ  $\tan(\arcsin x)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1.  $\frac{1}{5}$

2.  $\frac{1}{3}$

3.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4.  $\frac{1}{2}$

## ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

นิยาม... ลำดับเลขคณิตคือลำดับที่มีผลต่างร่วม  $d$  คงที่

ลำดับทั่วไป  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

ลำดับเลขคณิต  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

สูตรดังกล่าวเป็นการหาพจน์ที่  $n$  หากสังเกตให้ดี เรามีหลักคิดที่เราเคยเรียนเร็วกว่ามาก แต่ที่ต้องให้เรียน เพราะโจทย์บางข้อยังคงจำเป็นต้องใช้นิยามดังกล่าว

### Tip...

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนั้นทำได้ง่าย มากๆ ดังนี้

$$a_n = dn \text{ เป็นพจน์แรก}$$

**Ex.1** จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้อย่างรวดเร็วที่สุด

1.  $11, 13, 15, 19, \dots$        $a_n = \dots\dots\dots$

2.  $2, -1, -4, -7, -10, \dots$        $a_n = \dots\dots\dots$

3.  $7, 10, 13, 16, 19, \dots$        $a_n = \dots\dots\dots$

**Ex.2** พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต  $200, 182, 164, 146, \dots$

มีค่าต่างจากพจน์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent'40)

1. 54      2. 38

3. 22      4. 20

**Tip...**

๑ จริงๆ แล้วการที่เราจะหาพจน์ใดก็ตามจะหาได้จาก  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

แต่การที่โจทย์ไม่บอก  $a_1$  และ  $d$  มาตรงๆ นั้น ทำให้เราจะหาพจน์ที่ต้องการต้องเสียเวลาดังสมการ

2 สมการเพื่อหาค่า  $a_1$  และ  $d$  ให้เจอก่อน

๑ จากปัญหาดังกล่าวถ้าเราหัดเป็นคนช่างสังเกต เราจะหาพจน์ที่ต้องการได้เร็วกว่าดังนี้

$$a_1 \xleftarrow{(1-k)d} a_k \xrightarrow{(m-k)d} a_m \xrightarrow{(n-m)d} a_n$$

ขั้นที่ 1 หา  $d$  ได้จาก  $(m - k)d = a_m - a_k$

ขั้นที่ 2 หาพจน์ที่ต้องการได้จาก  $a_n = a_m + (n - m)d$

Ex.3 จงฝึกทำโจทย์ต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

โจทย์	ขั้นที่ 1 หา $d$ $(m - k)d = a_m - a_k$	ขั้นที่ 2 $a_n = a_m + (n - m)d$
1. พจน์ที่ 20 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_4 = 32$ และ $a_9 = 42$		
2. พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_4 = 26$ และ $a_9 = 61$		
3. พจน์ที่ 18 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_7 = 26$ และ $a_{13} = 80$		
4. พจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิตที่ $a_{17} = 104$ และ $a_{23} = 140$		

## การหาจำนวนพจน์

การหาจำนวนพจน์ของลำดับเลขคณิต ถ้าไม่มีเทคนิคแล้วถือว่าไม่ใช่เรื่องง่ายเลย แต่ถ้ามีเทคนิค และใช้เทคนิคเป็นแล้ว เรื่องนี้ก็ถือว่าเป็นโจทย์ที่เราตอบได้เร็วมากจนเพื่อนๆ จงงได้โดยแหละ เพื่อให้ง่าย และใช้ได้ในทุกกรณีแล้ว เราจะแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มดังนี้

	เลขที่เรียงต่อเนื่อง	เลขที่เรียงไม่ต่อเนื่อง (ลำดับหรืออนุกรม)
สรุปสูตร ถัด	$n = \frac{x_{\max}}{d} - \frac{x_{\min}}{d}$	$n = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{d} + 1$
ตัวอย่าง	เซตของจำนวน ที่ 3 หารลงตัว 4, 5, 6, ..., 9, 100	ลำดับ 4, 7, 10, ..., 100

	เลขที่เรียงต่อเนื่อง	เลขที่เรียงไม่ต่อเนื่อง (ลำดับหรืออนุกรม)
๑ ถ้าเป็นเลขที่เรียงโจทยจะสั่ง เองให้ หารอะไรลงตัว ๑ ถ้าเป็นลำดับจะต้องรู้ค่า $d$ เอง	ต้องเสียเวลาหา $a_1 = 6$ $a_n = 99$	ใช้ได้ทันที $a_1 = 4$ $a_n = 100$
คำนวณหาจำนวนพจน์จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$	จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$ เมื่อ $a_1 = 6, d = 3$ และ $a_n = 99$ จะได้ $99 = 6 + (n - 1)3$ $= 6 + 3n - 3$ $3n = 96$ $n = 32$	จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$ เมื่อ $a_1 = 4, d = 3$ และ $a_n = 100$ จะได้ $100 = 4 + (n - 1)3$ $= 4 + 3n - 3$ $3n = 99$ $n = 33$
คำนวณหาจำนวนพจน์อีกที่		

ข้อควรระวังสำหรับจำนวนพจน์ของลำดับที่มี  $d \neq 1$  (เลขที่เรียงต่อเนื่อง)

1.  $d$  ที่ใช้เป็นตัวหารนั้นต้องแยกกัน แม้ในทางพีชคณิตจะสามารถรวมกันได้แต่ก็ห้ามทำ
2. ถ้ามีเศษเหลือจากการหารต้องปิดทิ้งเสมอ ยกเว้นหารลงตัวให้ไปคู่อข้อ 3. ต่อ
3. ถ้า  $\frac{x_{\min}}{d}$  หรือ  $\frac{x_{\min} + 1}{d}$  หารด้วย  $d$  ลงตัวแล้วจำนวนพจน์ที่ได้จะต้องบวกเพิ่มอีก 1 เสมอ

Ex.4 จงหาจำนวนพจน์อย่างรวดเร็ว

โจทย์	จำนวนพจน์
1. $[10^2, 10^4]$ มีทั้งหมดกี่พจน์ที่หาร 9 ลงตัว	
2. $[100, 500]$ มีทั้งหมดกี่พจน์ที่หาร 7 ลงตัว	
3. 2, 9, 16, 23, ..., 695	
4. 5, 9, 13, 17, ..., 113	

Ex.5 ถ้า  $s = \{200, 201, 202, \dots, 400\}$  แล้วจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเซต  $s$  ที่หารด้วย 8 ลงตัวแต่หารด้วย 12 ไม่ลงตัวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |       |       |
|-------|-------|
| 1. 15 | 2. 18 |
| 3. 21 | 4. 24 |

Ex.6 จำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 100 ถึง 999 ที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัวมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

- |        |        |
|--------|--------|
| 1. 250 | 2. 283 |
| 3. 300 | 4. 303 |



ทฤษฎีของลิมิต

ถ้า  $a_n$  และ  $b_n$  เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และ  $C$  เป็นค่าคงที่แล้ว

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$  เมื่อ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

สูตรลัดลิมิตของลำดับ

สูตรลัดทั่วไป	Tip...(ดีกว่าสูตรลัดทั่วไป)
<p>กำหนดให้ <math>a_n</math> อยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามหารกัน</p> <p>1. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ = กำลังสูงสุดของส่วน</p> <p>ให้ตอบทันทีว่า</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	
<p>2. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ &gt; กำลังสูงสุดของส่วน</p> <p>ให้ตอบทันทีว่า</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	
<p>3. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ &lt; กำลังสูงสุดของส่วน</p> <p>ให้ตอบทันทีว่า</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$	

Ex.7 จงฝึกหาลิมิตของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1}$

= .....

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n^2 + 1}$

= .....

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 7n^3}{6 - 5n + 2n^2 - n^4}$

= .....

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9n^3 + 5n^2 - 1}{25n^3 - 16}}$

= .....

Ex.8 ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{3n^2 - 4} - \frac{n^2}{3n + 2} \right)$  เป็นเท่าใด

1. 0

2.  $\frac{2}{9}$

3.  $\frac{1}{3}$

4. ไม่มีลิมิต

Ex.9 กำหนดให้  $a_n$  เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n - a_1}{n} \right) = 5$

ถ้า  $a_9 + a_5 = 100$  แล้ว  $a_{100}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1. 500

2. 515

3. 520

4. หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

Ex.10 ถ้า  $a_n$  เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n} \right) = 4$  แล้ว  $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$

มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

**Tip...**

ถ้าลำดับที่โจทย์กำหนดเป็นลำดับตรรกยะมากกว่า โดยมี.....ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการบวกกันอนันต์พจน์ เราต้องบวกกันโดยใช้สูตรของซิกมาให้สำเร็จก่อนจึงจะใช้สูตรลัดเดิม

Ex.11 จงหาลิมิตต่อไปนี้ให้เร็วที่สุด

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^4 + 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3} \right)$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \right)$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} \right)$

Ex.12 สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม  $n \geq 4$  กำหนดให้  $a_n = \frac{n^4 + 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}$

ลำดับ  $a_n$  เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้ (Ent'39)

1. มีลิมิตเป็น 1
2. มีลิมิตเป็น 2
3. มีลิมิตเป็น 4
4. เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

Ex.13 ถ้า  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^k}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$  มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว ค่าของ  $A$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.ค. 52)

1. 0
2. 2
3. 4
4. 8

Ex.14  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n + 12n + 27n + \dots + 3n^3}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$  มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)