ลำดับ และ อนุกรม
(PART I)

<u>ลำดับ แบ่งได้เป็น 2 แบบ ตามจำนวนพจน์ คือ</u>

1. ลำดับจำกัด (Finite Sequence) คือ ลำดับที่มีพจน์สุดท้าย เช่น 2, 4, 6, 8
2. ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence) คือ ลำดับที่ไม่มีพจน์สุดท้าย เช่น 1, 3, 5, 7, ...

<u>ลำดับแบ่งตามเงื่อนไขมี 2 แบบ คือ</u>

1. ลำดับเลขคณิต
2. ลำดับเรขาคณิต

1. **<u>ลำดับเลขคณิต</u>** (Arithmetic Sequence)

คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์ที่ $n+1$ กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่

และค่าคงที่นี้ เรียกว่า ผลต่างร่วม (Common difference) ใช้สัญลักษณ์ d

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต เช่น

Ex 1. $2, 5, 8, 11, \ldots$ เป็น A.S มี $d = 3$

Ex 2. $9, 7, 5, 3, \ldots$ เป็น A.S มี $d = -2$

Ex 3. $5, 5, 5, 5, \ldots$ เป็น A.S มี $d = 0$

<u>การหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต</u>

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

2. **<u>ลำดับเรขาคณิต</u>** (Geometric Sequence)

คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่

และค่าคงที่นี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common ratio) ใช้สัญลักษณ์ r

ตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต เช่น

Ex 1. $3, 6, 12, 24, \ldots$ เป็น G.S มี $r = 2$

Ex 2. $2, -4, 8, -16, \ldots$ เป็น G.S มี $r = -2$

Ex 3. $5, 5, 5, 5, \ldots$ เป็น G.S มี $r = 1$

<u>การหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต</u>

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

อนุกรม (Series)

นิยาม กำหนดให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นลำดับจำกัด

จะเรียก $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ว่าเป็นอนุกรมจำกัดและใช้สัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$

อนุกรมแบ่งตามจำนวนพจน์ได้เป็น

1. อนุกรมจำกัด
2. อนุกรมอนันต์

อนุกรมแบ่งตามเงื่อนไขได้เป็น

1. อนุกรมเลขคณิต
2. อนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเลขคณิต

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{128}$

อนุกรมเลขคณิต คือ ผลบวกของลำดับเลขคณิต มีผลบวก n พจน์แรก ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

อนุกรมเรขาคณิต คือ ผลบวกของลำดับเรขาคณิต มีผลบวก n พจน์แรกดังนี้

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1$$

SUMMATION

ผลบวกที่ควรทราบ

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots n$ เขียนแทนด้วย Σn

   $= \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ เขียนแทนด้วย Σn^2

   $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ เขียนแทนด้วย Σn^3

   $= [\frac{n(n+1)}{2}]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\sum_{i=1}^{n} C = \underbrace{C + C + C + \ldots C}_{\text{n พจน์}}$ เขียนแทนด้วย ΣC, C = constant

   $= Cn$

Theory of Summation

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} Ka_i = K \sum_{i=1}^{n} a_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$

ตะลุยโจทย์ PAT 1
เรื่อง ลำดับและอนุกรม (PART I)
โดย พี่ช้าง เดอะเบรน

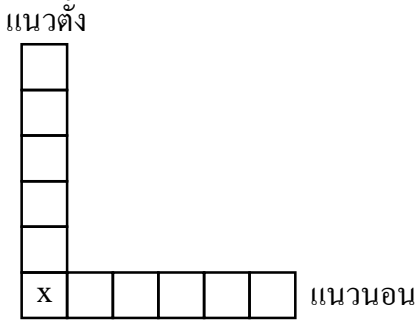
1. กำหนดให้ A, B, C, D, E, F เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $A \neq B$ แล้วค่า x และ y ของระบบสมการ $Ax + By = C$ กับ $Dx + Ey = F$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   1. $x = 1, y = 2$
   2. $x = 1, y = -2$
   3. $x = -1, y = 2$
   4. $x = -1, y = -2$

2. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 6 เป็น 3 เท่าของพจน์ที่ 15 อยากทราบว่าพจน์ที่ 9 จะเป็นสามเท่าของพจน์ที่เท่าใด

   1. พจน์ที่ 14
   2. พจน์ที่ 15
   3. พจน์ที่ 16
   4. พจน์ที่ 17

3. พิจารณารูปต่อไปนี้



ให้เติมจำนวนเต็มบวก $1, 2, 3, \ldots, 11$ ลงในช่องรูปสี่เหลี่ยม ช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแนวตั้งเท่ากับ 43 และผลบวกของจำนวนในแนวนอน เท่ากับ 28 จำนวน x ในช่องรูปสี่เหลี่ยมมุม เท่ากับเท่าใด

4. Let S_n and T_n be the respective sums of the first n terms of two arithmetic series.

   If $S_n : T_n = (7n + 1) : (4n + 27)$ for all n, the ratio of the eleventh term of the first series to the eleventh term of the second series is :

   A. 4 : 3 B. 3 : 2 C. 7 : 4 D. 78 : 71

   E. undetermined

   ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต 2 ชุด เป็นอัตราส่วน $(7n+1) : (4n+27)$ จงหาอัตราส่วนของพจน์ที่ 11

5. ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต 2 ชุดเป็นอัตราส่วน $(3n + 4) : (4n+9)$ จงหาอัตราส่วนของพจน์ที่ 9

6. ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต 2 ชุดเป็นอัตราส่วน $(7n+2) : (n+4)$ จงหาอัตราส่วนของพจน์ที่ 5

7. ให้ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{100}$ เป็นอนุกรมเลขคณิต และ

$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - \ldots\ldots\ldots + a_{99}^2 - a_{100}^2 = 1$ แล้วค่าของ $a_1^2 - a_{100}^2$ เท่ากับเท่าใด

8. The sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ satisfies $a_1 = 19$, $a_9 = 99$, and, for all $n \geq 3$, a_n is the arithmetic mean of the first $n-1$ terms. Find a_2

A. 29 B. 59 C. 79 D. 99 E. 179

9. พจน์ที่ 2,000 ของลำดับ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, ... มีค่าเท่าใด

10. จำนวนในข้อใดต่อไปนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มบวก 100 ตัวเรียงกัน

    1. 3,579,111,300 2. 5,815,937,260 3. 2,345,678,910 4. 1,627,384,950

11. กำหนด $\frac{x-1}{x}+\frac{x-3}{x}+\frac{x-5}{x}+.....+\frac{1}{x} = 4$ แล้วค่าของ $\sum_{i=x}^{x+14} i$ มีค่าเท่าใด

12. ถ้า $x = 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2.....-1998^2+1999^2$ แล้ว $\sqrt{\frac{x+1000}{5000}}$ มีค่าเท่าใด

13. กำหนด $f(x) = (1 + 2x + 3x^2 + ... + 101x^{100})(1 + x + x^2 + ... + x^{50})$
และถ้ากระจายผลคูณแล้วเขียนในรูป
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{150}x^{150}$ แล้ว $\sum_{i=0}^{150} a_i$ เท่ากับข้อใด
1. 505,000 2. 520,000 3. 262,071 4. 262,701

14. In the expansion
$(3x^8 - 2x^6 + x^5 + 2x^4 - x^2 + 1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{40}x^{40}$,
the sum $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{38} + a_{40} =$
a. 256 b. 512 c. 528 d. 540 e. 1024

15. Suppose that $(1 + x + x^3)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{20}x^{20} + a_{21}x^{21}$.
What is the value of $\sum_{i=3}^{21} a_i$
a. 2150 b. 2154 c. 2158 d. 2162 e. 2166

16. For $p = 1, 2, \ldots, 10$ let S_p be the sum of the first 40 terms of the arithmetic progression whose first term is p and whose common difference is $2p - 1$; then $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10}$ is

A. 80,000 B. 80,200 C. 80,400 D. 80,600 E. 80,800

17. กำหนด $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{4, 5, 6\}, S_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, $S_5 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน S_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 500,000 2. 500,050 3. 500,500 4. 505,000

18. ผลบวก 99 พจน์แรกของอนุกรม

$$1 + \frac{1^2+2^2}{1+2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} + \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} + \ldots$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

19. ผลบวก 1000 พจน์แรกของ $1!+2(2!)+3(3!)+4(4!)+\ldots..$
หารด้วย 2002 เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0 2. 1 3. 1001 4. 2001

20. ถ้า $x = \sum_{m=1}^{6}\sum_{n=1}^{4}\left(mn\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

21. กำหนดให้ $m = \frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+K+\frac{1}{97\cdot 100}$
ถ้าเขียน m ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำแล้ว ผลบวกของเศษและส่วนของเศษส่วนนี้มีค่าเท่าใด

22. กำหนด $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + K + n^3$

ค่าของ $\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + K + \frac{1}{\sqrt{S_{99}}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.96 2. 1.98 3. 2 4. 4

23. ถ้าลำดับ $x(y-z), y(z-x), z(x-y)$ ต่างไม่เท่ากับ 0 และเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม r แล้ว r จะสอดคล้องกับสมการใดต่อไปนี้

1. $r^2 + r + 1 = 0$ 2. $r^2 - r + 1 = 0$
3. $r^4 + r^2 - 1 = 0$ 4. $(r+1)^4 + r = 0$

24. Define a sequence of real numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ by $a_1 = 1$ and $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$ for all $n \geq 1$. Then a_{100} equals

A. 33^{33} B. 33^{99} C. 99^{33} D. 99^{99} E. none of these

25. ถ้าลำดับ $2, a, b, c, 162$ เป็นลำดับเรขาคณิตแล้วค่าของ

$\log_a 2 + \log_b a + \log_c b + \log_a b + \log_b c + \log_c 162$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. 4 3. 6 4. 8

26. By adding the same constant to each of 20, 50, 100 a geometric progression results. The common ratio is :

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{3}$

27. กำหนด $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots\ldots + a^{2x} = (1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$ แล้วค่าของ $\sum_{i=1}^{x} i$ คือข้อใด

1. 26 2. 27 3. 28 4. 29

28. กำหนดอนุกรมให้ดังนี้

$3^1+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}-.....$

ค่าของผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมเท่ากับข้อใด

1. $\frac{3}{10}(1-3^{100})$ 2. $\frac{3}{4}(1-3^{100})$ 3. $\frac{9}{10}(1-3^{100})$ 4. $\frac{6}{5}(1-3^{100})$

29. ถ้า $(3^2)(3^4)(3^8).....(3^{2^x}) = 27^{7\log_2 64}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

30. กำหนดให้ $(1+x)^{2n} = a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_{2n}x^{2n}$

และ $f(n) = a_0+a_2+a_4+.....+a_{2n}$

หลักหน่วยของ $\frac{3}{2}\left[\sum_{i=1}^{10} f(i)\right]$ เป็นเลขใด