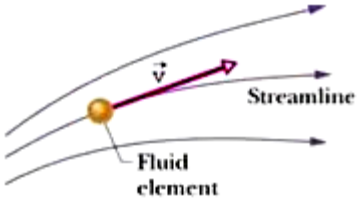
เอกสารประกอบการสอน วิชาฟิสิกส์

ติว Summer

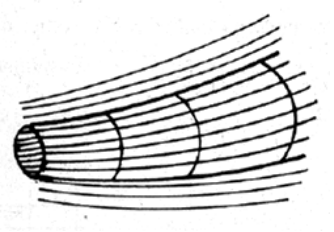
หลักของแบร์นูลลี (*Bernoulli 's Principle*)

ของไหลอุดมคติ (*Ideal fluid*) มีสมบัติดังนี้

1. ของไหลมีการไหลอย่างสม่ำเสมอ
2. ของไหลมีการไหลโดยไม่หมุน
3. ของไหลมีการไหลโดยไม่มีแรงต้านเนื่องจากความหนืดของของไหล
4. ของไหลไม่สามารถบีบอัดได้



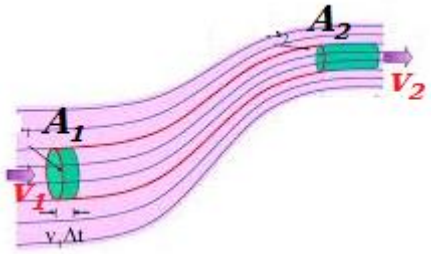
สายกระแสการไหล (*Streamline*)



หลอดการไหล (*Tube of Flow*)

1. สมการความต่อเนื่องของของไหล *(the equation of continuity)*

ผลคูณของพื้นที่หน้าตัดที่ของไหลไหลผ่านกับอัตราเร็วของของไหลที่ผ่านไม่ว่าจะเป็นตำแหน่งใดในหลอดการไหลมีค่าคงตัว ผลคูณของ Av เรียกว่า *volume flux* หรือ **อัตราการไหล** (*flow rate*) เขียนแทนด้วย Q ซึ่งมีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร/วินาที โดยอัตราการไหลจะมีค่าคงที่เสมอ ซึ่งเขียนสมการได้ดังนี้



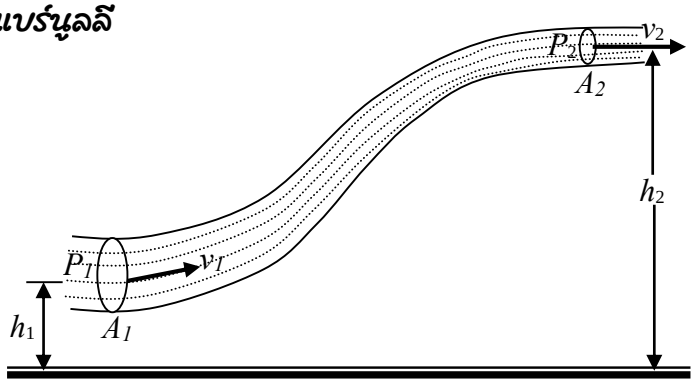
อัตราการไหล $Q = Av =$ ค่าคงตัว

จะได้ $Q = A_1v_1 = A_2v_2$

ความเร็วของไหลที่ไหลผ่านท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดไม่เท่ากันจะเป็นดังนี้

- ท่อเล็ก ⇨ ความเร็วมาก
- ท่อใหญ่ ⇨ ความเร็วน้อย

2. สมการแบร์นูลลี



พิสูจน์ด้วยหลักของพลังงานจะได้ว่า

ผลรวมของความดัน พลังงานจลน์ต่อปริมาตร และพลังงานศักย์ต่อปริมาตร ทุก ๆ จุดภายในท่อที่ของไหลเคลื่อนที่มีค่าคงตัว สมการของแบร์นูลลี เขียนได้เป็น

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{ค่าคงตัว}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

จากสมการแบร์นูลลี ทำให้เราทราบว่า

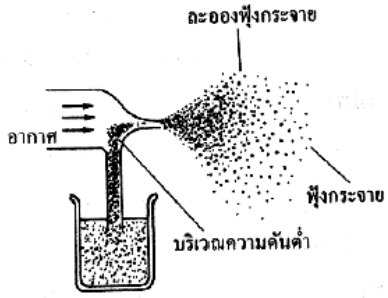
- ➢ **ในท่อเล็ก ⇨ ของไหลมี ความเร็วมาก , ความดันน้อย**
- ➢ **ในท่อใหญ่ ⇨ ของไหลมี ความเร็วน้อย , ความดันมาก**

➢ จากสมการแบร์นูลลี จะเขียนได้เป็น

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(h_2 - h_1)$$

ตัวอย่างของการนำสมการแบร์นูลลีไปใช้ เช่น การออกแบบปีกเครื่องบิน อุปกรณ์พ่นสี แรงยกหลังคาบ้าน

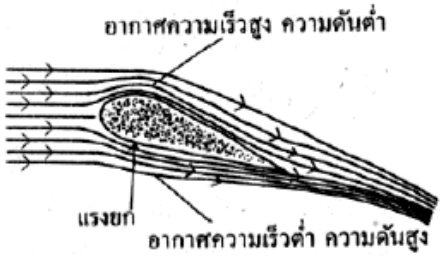
1. <u>การพ่นสี</u>

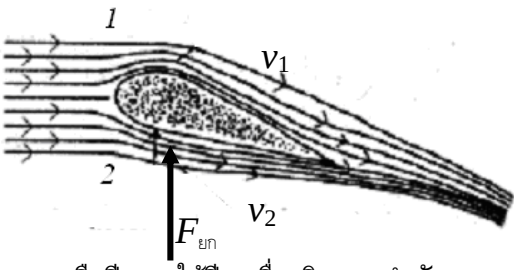


อุปกรณ์ในการพ่นสีมีส่วนประกอบ ดังรูป เมื่ออากาศเคลื่อนที่ผ่านท่อไปยังหัวฉีดอัตราเร็วของอากาศที่ผ่านหัวฉีดจะมากกว่าอัตราเร็วของอากาศที่ผ่านมาตามท่อมาก เพราะหัวฉีดมีขนาดเล็กกว่าท่อมาก ดังนั้นความดันของอากาศบริเวณหัวฉีดจึงน้อยมาก สารละลายของสีที่อยู่ในกระป๋องซึ่งมีความดันสูงกว่าเคลื่อนที่ผ่านตามท่อไปผสมกับอากาศที่บริเวณหัวฉีด ทำให้ทั้งอากาศ และเม็ดสีถูกฉีดและกระจายออกทางหัวฉีดด้วยอัตราเร็วสูง การทำงานของคาร์บูเรเตอร์ของเครื่องยนต์แก๊สโซลีนก็อาศัยหลักการเดียวกันนี้

2. <u>การออกแบบปีกเครื่องบิน</u>

การออกแบบปีกของเครื่องบิน (*air foil*) ก็อาศัยหลักของแบร์นูลลี เพื่อให้เกิดแรงยกที่ต้องการ จะต้องให้ปีกมีรูปร่างและมุมปะทะอากาศที่เหมาะสม โดยออกแบบให้ด้านบนของปีกมีส่วนโค้งมากกว่าด้านล่าง ดังรูป เมื่อเครื่องบินเคลื่อนที่ ในเวลาเดียวกันอากาศที่สัมผัสผิวของปีกเครื่องบินด้านบนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางมากกว่าอากาศที่สัมผัสผิวของปีกด้านล่าง ดังนั้นอัตราเร็วของอากาศที่สัมผัสกับผิวด้านบนจะมากกว่าอัตราเร็วของอากาศที่สัมผัสด้านล่างของปีกเครื่องบิน จึงทำให้ความดันของอากาศที่ผิวด้านล่างมากกว่าที่ผิวปีกด้านบน เป็นผลให้เกิดเป็นแรงยกขึ้นกระทำกับปีกเครื่องบิน





สมมติให้ v_1 และ v_2 เป็นความเร็วของอากาศเหนือปีกและใต้ปีกเครื่องบิน ตามลำดับ

P_1 และ P_2 เป็นความดันของอากาศเหนือและใต้ปีกเครื่องบิน ตามลำดับ

โดยการใช้สมการแบร์นูลลี และอนุโลมว่าปีกเครื่องบินบางมาก จนถือว่าด้านบนและด้านล่างของปีกอยู่ในระดับเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

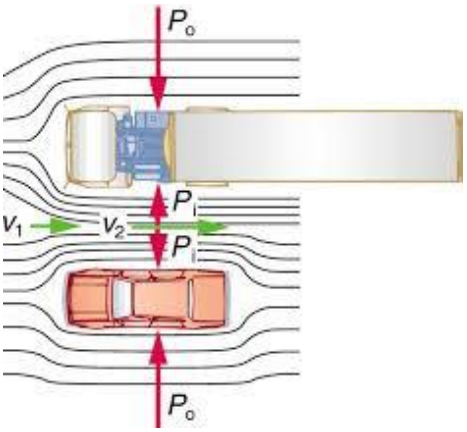
จะได้

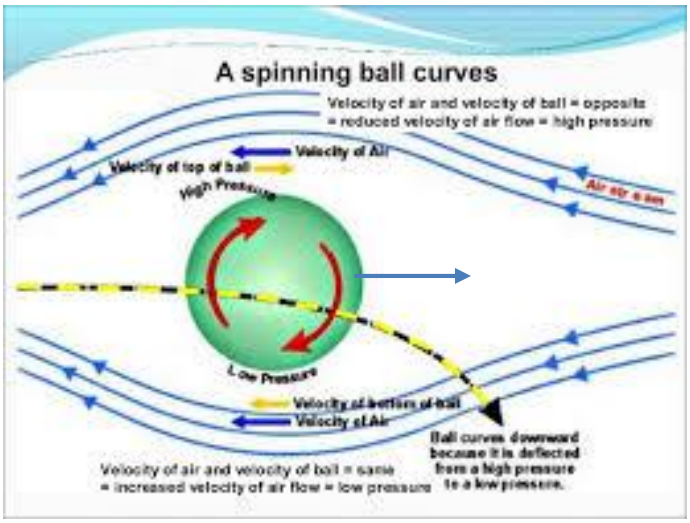
$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

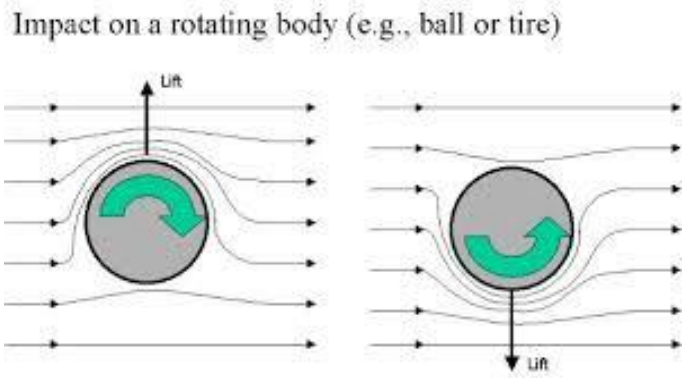
ถ้า A คือ พื้นที่ใต้ปีกเครื่องบิน จะได้ขนาดแรงยกขึ้นที่ปีกเครื่องบิน (F) คือ

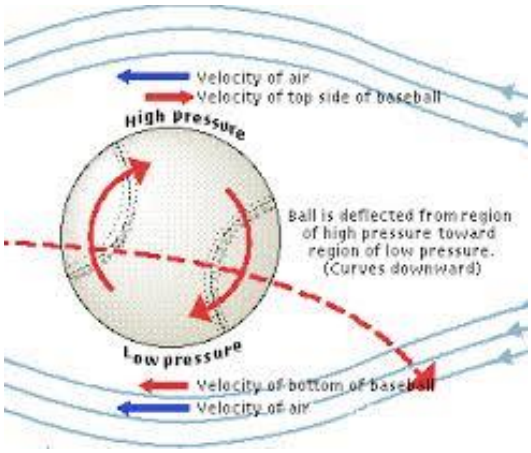
$$F = (P_2 - P_1)A = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)A$$

จากหลักการออกแบบปีกของเครื่องบินนี้ สามารถนำมาใช้อธิบายในการเกิดพายุแล้วหลังคาบ้านเรือนจะถูกกระแสลมพัดพา ทำให้เกิดความเสียหายได้ เนื่องจากขณะที่ลมพัดจะทำให้อัตราเร็วของลมพายุที่พัดเหนือหลังคาบ้านมากกว่าอัตราเร็วของลมหรืออากาศที่อยู่ภายในบ้าน(อากาศที่อยู่ภายในบ้านจะมีอัตราเร็วเป็นศูนย์เพราะอากาศนั้นอยู่นิ่ง)ทำให้ความดันของอากาศที่อยู่เหนือหลังคาบ้านน้อยกว่าความดันของอากาศที่อยู่ใต้หลังคาบ้านจึงทำให้เกิดเป็นแรงยกกระทำต่อหลังคาบ้านเป็นผลทำให้หลังคาบ้านถูกพายุพัดลอยไปได้







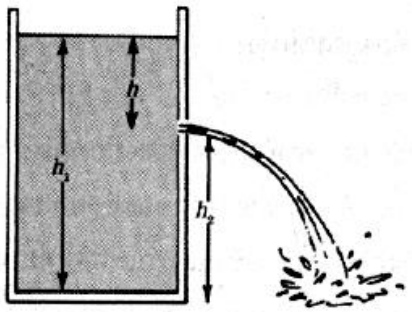


Applications of Bernoulli 's Principle.

A Person who stands near a railway feels like falling into it when suddenly a train moves with a high speed passes him. It is because the velocity of the air in front of him increases.
According to Bernoulli 's Principle, the pressure of the moving air decreases as the speed of the air increases. The higher atmospheric pressure behind pushes him forward.

ตัวอย่าง ถังบรรจุของเหลวซึ่งมีความหนาแน่น ρ มีรูเล็ก ๆ ที่ด้านข้างของถังซึ่งอยู่ต่ำจากระดับผิวของเหลวในถังเป็นระยะ h จงหาอัตราเร็วของลำของเหลวที่พุ่งออกจากรูนี้ กำหนดให้รูด้านข้างมีพื้นที่น้อยมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ผิวของเหลวในถัง

วิธีทำ



รูป ของเหลวบรรจุในถังพุ่งออกจากรูที่ผนังด้านข้าง

ให้ที่ผิวของเหลวมีความดัน P_1 มีอัตราเร็ว v_1 และอยู่สูง h_1 ของเหลวที่อยู่ด้านข้างมีความดัน P_2 มีอัตราเร็ว v_2 และอยู่สูง h_2 นั่นคือ $h_1 - h_2 = h$ ที่รูด้านข้างมีพื้นที่น้อยมาก เมื่อเทียบกับพื้นที่ผิวของเหลวในถัง แสดงว่าระดับผิวของเหลวจะเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนถือได้ว่าของเหลวที่ระดับน้ำอยู่นิ่ง นั่นคือ $v_1 = 0$ และ v_2 เป็นอัตราเร็วของของเหลวขณะที่ไหลออกจากรูให้มีค่าเท่ากับ v

พิจารณาความดันที่ผิวของเหลว P_1 ในภาชนะ และความดัน ณ ตำแหน่งที่ของเหลว พุ่งออกจากรูที่ผนังภาชนะ P_2 ต่างก็มีค่าเท่ากับความดันบรรยากาศ นั่นคือ $P_1 = P_a$ และ $P_2 = P_a$

ถ้าให้จุดที่ของเหลวพุ่งออกมาเป็นจุดอ้างอิง จากสมการของแบร์นูลลี

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

ดังนั้น

$$P_a + 0 + \rho g h = P_a + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\rho g h = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า***อัตราเร็วของของเหลวที่พุ่งออกจากรูที่ผนังด้านข้างของภาชนะเท่ากับอัตราเร็วของวัตถุที่ตกแบบเสรีจากที่ระดับสูง h เท่ากัน*** อีกทั้งอัตราเร็วของของเหลวที่พุ่งออกจากรูที่ผนังภาชนะจะไม่ขึ้นกับชนิดของของเหลวที่บรรจุในภาชนะ อัตราเร็วของของเหลวที่พุ่งออกจากรูด้านข้างของภาชนะตามความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้***ทอร์ริเชลลี*** อธิบายได้เป็นคนแรกจึงเรียกว่า**กฎของทอร์ริเชลลี**

โจทย์

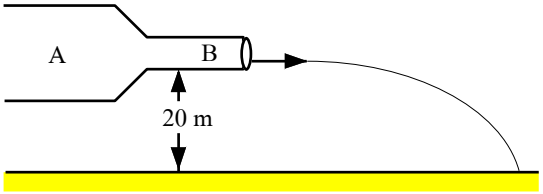
1. ท่อรัศมี R เซนติเมตร มีน้ำไหลผ่าน V ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที อัตราเร็วของน้ำเป็นกี่เซนติเมตรต่อวินาที

1. $\frac{V}{R^2}$ 2. $\frac{V}{\pi R^2}$ 3. $\frac{R^2}{V}$ 4. $\frac{\pi R^2}{V}$

2. เปิดน้ำจากก๊อกให้ไหลลงในบีกเกอร์ความจุ 1 ลิตร จนเต็มภายในเวลา 10 วินาที ถ้าน้ำไหลออกจากก๊อกเป็นลำด้วยอัตราเร็ว 0.5 เมตร/วินาที จงหารัศมีของปลายก๊อก

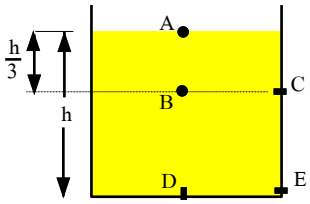
3. มีน้ำไหลออกจากปลายก็อกน้ำด้วยความเร็ว v_o ถ้าปลายก็อกน้ำมีเส้นผ่านศูนย์กลาง L จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางของลำน้ำในเทอมของระยะทาง y ใต้ปลายก็อกน้ำ

4. ท่อน้ำท่อหนึ่งมีส่วนปลายเล็กลงโดยวางอยู่ในแนวราบ ปากท่อสูงจากพื้น 20 เมตร ปรากฏว่าน้ำที่พุ่งออกจากปากท่อจะไปตกกระทบพื้นห่างจากปากท่อไปตามแนวราบเป็นระยะ 16 เมตร ถ้าท่อส่วน B มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นครึ่งหนึ่งของท่อน้ำส่วน A จงหาอัตราเร็วของน้ำบริเวณท่อ A



5.ถังบรรจุน้ำเปิดสัมผัสอากาศ มีรูรั่วขนาดเท่ากันที่ตำแหน่ง C D และ E ดังรูป ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

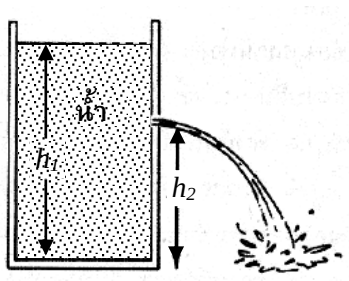
1. อัตราเร็วของน้ำที่ C น้อยกว่าที่ E
2. อัตราเร็วของน้ำที่ D เท่ากับที่ E
3. ความดันเกจที่ D เท่ากับความดันเกจที่ E
4. ความดันเกจที่ D มากกว่าความดันเกจที่ B



6. ถังน้ำมีน้ำบรรจุอยู่สูง h เมตร ที่ข้างถังมีรูเล็ก ๆ ซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่างระดับน้ำกับก้นถัง เมื่อปล่อยน้ำให้พุ่งออกจากรูเล็ก ๆ นี้ อัตราเร็วของน้ำที่พุ่งออกมีค่ากี่เมตรต่อวินาที **กำหนดให้** g คือความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก

1. $\sqrt{gh}$
2. $\sqrt{2gh}$
3. gh
4. $2gh$

7. ถังบรรจุน้ำซึ่งมีความหนาแน่น ρ กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร มีรูเล็ก ๆ ที่ด้านข้างของถัง ซึ่งระดับรูอยู่สูงกว่าพื้นเป็นระยะ h_2 เมตร ระดับน้ำอยู่สูงกว่าพื้นเป็นระยะ h_1 เมตร จงหาอัตราเร็วของลำน้ำที่พุ่งออกจากรูนี้ตอนเริ่มพุ่ง กำหนดให้รูด้านข้างมีพื้นที่น้อยมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ของน้ำในถัง

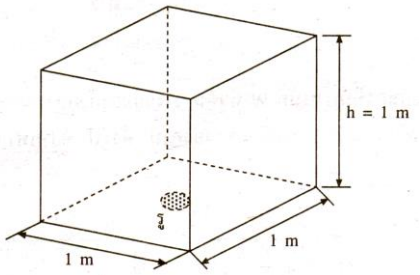


1. $\sqrt{2gh_1}$
2. $\sqrt{2gh_2}$
3. $\sqrt{2g\ h_1-h_2}$
4. $\sqrt{2g\ h_1+h_2}$

8. ถังใส่น้ำใบหนึ่งตั้งอยู่บนโต๊ะตัวหนึ่งซึ่งสูง h ถ้ารูเล็ก ๆ ถูกเจาะขึ้นที่ข้างถังตรงก้นถัง พบว่ากระแสน้ำที่พุ่งออกจะกระทบพื้นห่างจากถังเป็นระยะทางตามแนวระดับ R ระดับน้ำในถังสูงเท่าใด

9. ถังทรงสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ใบหนึ่งบรรจุน้ำอยู่เต็ม ถ้าปล่อยน้ำไหลออกจากรูกลมก้นถังที่มีขนาดพื้นที่เท่ากับ 0.1 ตารางเมตร ดังรูป อยากทราบว่า จะใช้เวลานานเท่าใด น้ำจะไหลออกหมดถังพอดี

1. $2\sqrt{5}$ วินาที
2. $0.2\sqrt{5}$ วินาที
3. $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ วินาที
4. $0.5\sqrt{5}$ วินาที



10. ภาชนะโลหะรูปทรงกระบอกพื้นที่หน้าตัดภายนอก 240 ตารางเซนติเมตร หนัก 18 นิวตัน ลอยตั้งตรงในแนวดิ่งอยู่ในน้ำ ถ้าก้นภาชนะเกิดมีรูรั่วพื้นที่หน้าตัด 0.5 ตารางเซนติเมตร ขณะเริ่มต้นน้ำจะไหลเข้าด้วยอัตรากี่ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

1) $5\sqrt{6}\ cm^3/s$
2) $10\sqrt{6}\ cm^3/s$
3) $20\sqrt{6}\ cm^3/s$
4) $25\sqrt{6}\ cm^3/s$

11. น้ำไหลผ่านท่ออันหนึ่งด้วยปริมาณ 60 เมตร^3/วินาที พื้นที่หน้าตัดของท่อใหญ่เป็น 10 ตารางเมตร ตรงท่อเล็กมีขนาด 5 ตารางเมตร ศูนย์กลางของท่อใหญ่อยู่ต่ำกว่าท่อเล็ก 5 เมตร ถ้าความดันในท่อใหญ่เท่ากับ 10.5×10^4 นิวตัน/ตร.เมตร จงหาความดันในท่อเล็ก *(1)*

1) 1000 N/m^2 2) 1500 N/m^2 3) 2000 N/m^2 4) 2500 N/m^2

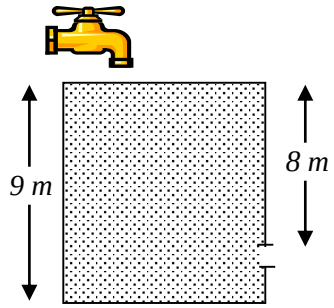
12. เครื่องบินลำหนึ่งต้องมีแรงยก 900 นิวตันต่อตารางเมตร จึงจะสามารถบินขึ้นได้ ถ้าความเร็วของอากาศที่พัดผ่านส่วนล่างของปีกเท่ากับ 100 เมตร/วินาที จงหาความเร็วของอากาศที่พัดผ่านส่วนบนของปีก เพื่อให้เกิดแรงยก 900 นิวตัน/ตารางเมตร กำหนดให้ความหนาแน่นของอากาศขณะนั้นเป็น 1.2 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร *(2)*

1) 102.2 m/s 2) 107.2 m/s 3) 110 m/s 4) 112.2 m/s

13. อัตราเร็วของลมพายุที่พัดเหนือหลังคาบ้านหลังหนึ่งเป็น 30 เมตร/วินาที และหลังคาบ้านนี้มีพื้นที่ 175 ตารางเมตร แรงยกที่กระทำกับหลังคาบ้านเป็นเท่าใด กำหนดให้ความหนาแน่นของอากาศขณะนั้น เท่ากับ 0.3 กิโลกรัม/เมตร^3 *(3)*

1) 1.35×10^4 นิวตัน 2) 2.1×10^4 นิวตัน 3) 2.36×10^4 นิวตัน 4) 3.1×10^4 นิวตัน

14. ถังน้ำปลายบนเปิดใบหนึ่งสูง 9 เมตร เปิดก๊อกด้านบนให้น้ำไหลเข้าถังจนเต็ม เมื่อเกิดรูรั่วข้างถังขนาด 10 mm^2 ที่ตำแหน่งต่ำจากปากถัง 8 เมตร ทำให้น้ำรั่วออกจากถัง ถ้าต้องการเติมให้น้ำเต็มถังอยู่ตลอดเวลา จะต้องปล่อยน้ำออกจากก๊อกวินาทีละกี่ลบ.ซม.กำหนดน้ำมีความหนาแน่น $10^3\ kg/m^3$ และความดันบรรยากาศรอบ ๆ ถังเป็น 1 บรรยากาศ



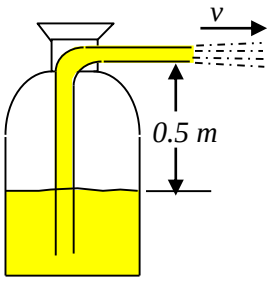
15. กระป๋องน้ำอัดลมใบหนึ่งสูง 11 ซม. บรรจุน้ำอัดลมที่มีความหนาแน่น $1.5\times10^3\ kg/m^3$ สูง 9 ซม. อัดแก๊สที่มีความดัน $1.5\times10^5\ N/m^2$ ชายคนหนึ่งเอาตะปูที่มีพื้นที่หน้าตัด 8×10^{-5} ตร.เมตร ตอกเข้าไปที่กึ่งกลางกระป๋องแล้วดึงออก จงหาอัตราเร็วของน้ำอัดลมที่พุ่งออกมา กำหนดความดันบรรยากาศเป็น $10^5\ N/m^2$ *(3)*

1) 4.1 m/s 2) 6.7 m/s 3) 8.2 m/s 4) 13.4 m/s

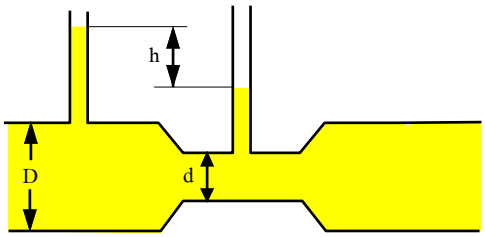
16. น้ำไหลด้วยอัตรา 30 มิลลิลิตร/วินาที ผ่านช่องเปิดที่ก้นของถังใบหนึ่งซึ่งมีน้ำลึก 4 เมตร ถ้ามีความดัน 50 kPa กระทำเพิ่มเติมที่ผิวบนของน้ำ จงหาอัตราที่น้ำรั่วออกมาใหม่ในหน่วยมิลลิลิตร/วินาที *(4)*

1) 25 mL/s 2) 30 mL/s 3) 40 mL/s 4) 45 mL/s

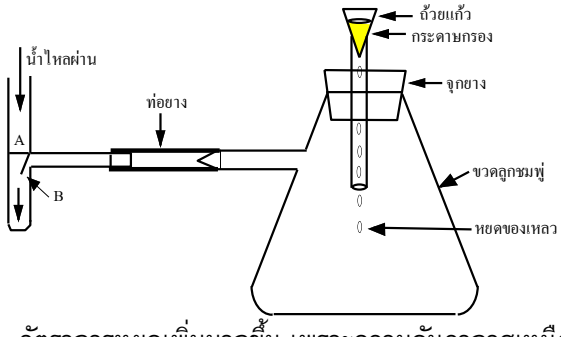
17. น้ำถูกฉีดออกจากเครื่องดับเพลิงด้วยความดันอากาศตามรูป จงหาความดันเกจของแก๊สในถังเพื่อดันน้ำให้พุ่งออกมาด้วยความเร็ว 30.0 m/s. เมื่อระดับน้ำอยู่ต่ำจากหัวฉีด 0.5 m.



18. ท่อน้ำมีเส้นผ่านศูนย์กลาง D = 20 ซม. ส่วนหนึ่งของท่อขอดเล็กลงมีเส้นผ่านศูนย์กลาง d = 10 ซม. ส่วนทั้งสองของท่อมีหลอดแก้วเล็ก ๆ เสียบอยู่ดังรูป ถ้ามีน้ำไหลในท่ออย่างสม่ำเสมอ ทำให้ระดับน้ำในท่อเล็กต่างกัน h = 15 ซม. จงหาอัตราเร็วของน้ำที่ไหลในท่อใหญ่



19. ระบบกรองสารดังแสดงในรูปต่อไปนี้ เมื่อมีน้ำไหลผ่านท่อ คำอธิบายใดถูกต้อง (3)

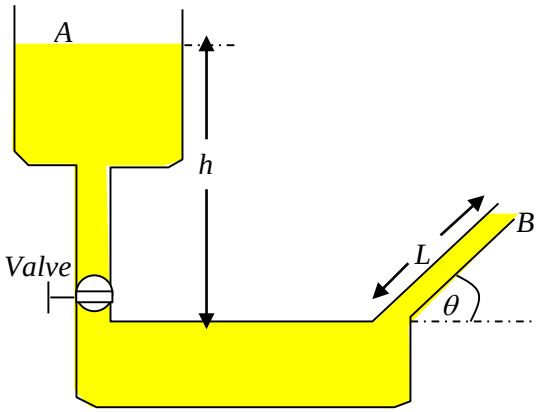


A = ตำแหน่งของลิ้นปิดเปิด เมื่อไม่มีน้ำไหลผ่านท่อ
B = ตำแหน่งของลิ้นปิดเปิด เมื่อน้ำไหลผ่านท่อ

1. อัตราการหยดเพิ่มมากขึ้น เพราะความดันอากาศเหนือกรวยเพิ่มขึ้น
2. อัตราการหยดเพิ่มมากขึ้น เพราะความดันอากาศเหนือกรวยลดลง
3. อัตราการหยดเพิ่มมากขึ้น เพราะความดันอากาศในขวดลูกชมพู่ลดลง
4. อัตราการหยดเป็นปกติเหมือนเดิมไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ เกิดขึ้น

20. ถังบรรจุน้ำขนาดใหญ่มีรูรั่วข้างถังขนาด 0.8 ตารางเซนติเมตร ในเวลา 1 นาที รองน้ำที่รั่วได้ 19.2×10^{-3} ลูกบาศก์เมตร รูรั่วอยู่ต่ำกว่าผิวน้ำในถังกี่เมตร

21. จากรูป แสดงภาพถังน้ำที่มีวาล์วที่ด้านล่างถัง ถ้าวาล์วนี้ถูกเปิดออก จงหาว่าสายน้ำที่พุ่งออกมาจากปลาย B จะเคลื่อนที่ได้ระยะสูงสุดตามแนวดิ่งเป็นเท่าใดเทียบกับจุด B สมมุติให้ $h = 10\ m.$ $L = 2\ m.$ และ $\theta = 30^\circ$ พื้นที่หน้าตัดที่จุด A มีค่ามาก ๆ เมื่อเทียบกับจุด B



22. แท่งแก้วตัวยู ปลายทั้งสองเปิด เติมน้ำตามรูปที่ 1 เทน้ำมันความหนาแน่น 750 kg/m^3 ลงในแขนข้างขวาของแท่งแก้วมีความสูง $L = 5\ cm.$ ตามรูปที่ 2

ก. จงหาผลต่างของความสูง h ของผิวหน้าของของเหลว 2 ชนิด

ข. แขนด้านขวาของท่อ ถูกป้องกันจากการพัดของอากาศ ขณะที่มีอากาศพัดผ่านที่ท่อด้านซ้าย จนผิวหน้าของของเหลวทั้งสองอยู่ที่ระดับความสูงเดียวกัน ตามรูปที่ 3 จงหาความเร็วของอากาศที่ต้องเป่าผ่านแขนซ้ายของท่อ (กำหนดให้ ความหนาแน่นของอากาศมีค่า 1.29 kg/m^3)